Temat 5: Liczby pierwsze

Zacznijmy od definicji liczb pierwszych

Definition 0.1 *Liczbę naturalną $p > 1$ nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki, to jest liczbę 1 i samą siebie p. To znaczy ze liczby pierwsze dzielą się tylko przez liczbę 1 i przez siebie samą. Każda inna liczba nazywa się liczbą złożoną.*

Zauważmy, że liczba natyralna $p = 1$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż ma tylko jeden dzielnik samą siebie i nie jest wieksza od 1. Liczba 0 rȯwnież nie jest pierwsza bo jest mniejsza od 1, podzielona przez dowolną liczbę naturalną różną od zera daje wynik 0.
Wymieńmy kilka kolejnych liczb pierwszych

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, \cdots ;$$

Z defincji wynika w sposȯb oczywisty, że liczba $p = 2$ jest jedyną liczbą pierwszą parzystą.

Jedna z najważniejszych własności liczb pierwszych opisana jest w następującym twierdzeniu:

Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki rozkład jest jedyny.*
Inaczej, jeżeli n jest liczbą naturalną to istnieją liczby pierwsze

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_k$$

takie, że

$$n = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_k$$

0.1 Sposȯb rozkładu liczb na czynniki pierwsze

Z fundamentalnego twierdzenia arytmetyki wiemy, że każda liczba naturalna dodatnia ma postać iloczynu liczb pierwszych. To znaczy, że każda liczba naturalna dodatnia $p > 1$ rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Co więcej taki rozkład jest jedyny.

Sposȯb rozkładu liczby naturalnej m na czynniki pierwsze jest prosty. Mianowicie, dzielimy liczbę m przez kolejne liczby pierwsze. Wtedy liczba m rȯwna się iloczynowi dzielnikȯw.

Przykład 0.1 *Rozłȯż liczbę $m = 1638$ na czynniki pierwsze.*

Posłożymy się schematem

$$\begin{array}{l|l} 1638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba 1638 rozkłada się na czynniki $2, 3, 3, 7, 13$
To znaczy

$$1638 = 2 * 3 * 3 * 7 * 13$$

Zadanie 0.1 *Rozłóż liczbę m=273 na czynniki pierwsze posługując się powyższym schematem.*

Zadanie 0.2 *Rozłóż liczbę m=5040 na czynniki pierwsze.*

0.2 Największy wspólny dzielnik

Pojęcie największego wspólnego dzielnika wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 0.2 *Wspólnym dzielnikiem liczb* 21 *i* 57 *jest liczba* 3*, ponieważ liczba* 3 *dzieli liczbę* 21 *i dzieli liczbę* 57*. Poza tym te liczby nie mają innych wspólnych dzielników.*

$$21 : 3 = 7 \;\; i \;\; 57 : 3 = 19$$

Zatem liczby 21 i 57 rozkładają się na czynniki

$$21 = 3 * 7 \;\; i \;\; 57 = 3 * 19,$$

Liczba 3 jest wpólnym dzielnikiem liczby 21 i liczby 57. Zauważamy również, że te dwie liczby nie mają innych wpólnych dzielników. Dlatego liczba 3 jest najwiekszym wspólnym dzielnikiem liczby 21 i liczby 57.

Przykład 0.3 *Znajdż największy wspólny dzielnik liczb* 42 *i* 78*.*

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2, \\ 21 & 3, \\ 7 & 7, \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Zauważamy, że te liczby

$$42 = 2 * 3 * 7 \quad i \quad 78 = 2 * 3 * 13$$

mają dwa wspólne dzielniki 2 i 3. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 42 i 78 jest liczba $2 * 3 = 6$.

Dzielnik 7 liczby 42 nie dzieli liczby 78 oraz dzielnik 13 liczby 78 nie dzieli liczby 42.
Z powyższych przykładów widzimy, że najwiekszy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych możemy wyznaczyć rozkładając te liczby na czynniki pierwsze a następnie wybieramy ich wspólne dzielniki. Wtedy za największy wspólny dzielnik jest równy iloczynowi ich wspólnych dzielników.

Przykład 0.4 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczby* 210 *i liczby* 231

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2, \\ 105 & 3, \\ 35 & 7, \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Zauważamy, że te liczby

$$210 = 2*3*7*5 \quad i \quad 231 = 3*7*11$$

mają dwa wspólne dzielniki 3 i 7. Dlatego najwiekszym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest iloczyn $3*7 = 21$. Sprawdzamy, że

$$210 : 21 = 10 \quad oraz \quad 231 : 21 = 7.$$

Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest iloczyn $3*7 = 21$.
Dzielniki 2, 5 liczby 210 nie dzielą liczby 231 oraz dzielnik 11 liczby 231 nie dzieli liczby 210.

Zadanie 0.3 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 315 *i* 385

Zadanie 0.4 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 1024 *i* 3072

0.3 Algorytm Euklidesa (325-265 B.C.)

Opócz sposobu znajdowania największego wspólnego dzielnika przez rozkład liczb a, b na czynniki pierwsze, istnieją inne sposoby. Najbardziej efektywnym sposobem wyznaczania największego wspólnego dzielnika liczb a, b jest Algorytm Euklidesa. Już w starożytnych czasach w Egipcie, Euklides grecki nauczyciel i dziekan wydzialu nauk przyrodniczych na Uniwersytecie w Aleksandrii podał algorytm na znajdowanie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych. Niżej podajemy opis algorytmu Euklidesa.

Zacznijmy opis algorytmu Euklidesa od przykładów.

Przykład 0.5 *Znajdż największy wspólny dzielnik liczb $a = 78$ i $b = 42$ stosując Algorytm Euklidesa.*

W liczbie $a = 78$ liczba $b = 42$ miejści się raz i zostaje reszta 36.
Dalej wykonujemy dzielenia według schematu

$$\begin{array}{ccc}
a = 78, \quad b = 42 & | & reszta \\
-------- & & --- \\
\frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{78} & | & 36 \\
\frac{42}{36} = 1 + \frac{6}{36} & | & 6 \\
\frac{36}{6} = 6 & | & 0
\end{array}$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 78 i 42 jest ostatnia reszta 6 różna od zera.
Ostatnia reszta 6 różna od zera jest rownież największym dzielnikiem reszty 36 i liczb 42 *i* 78
Rozpatrzymy następny przykład zastosowania Algorytmu Euklidesa.

Przykład 0.6 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb $a = 1995$ i $b = 1190$*

$$\begin{array}{ccc}
a = 1995, \quad b = 1190 & | & reszta \\
-------- & & --- \\
\frac{1995}{1190} = 1 + \frac{805}{1190} & | & 805 \\
\frac{1190}{805} = 1 + \frac{6}{385} & | & 385 \quad ; \\
\frac{805}{385} = 2 + \frac{35}{385} & | & 35 \\
;8 = 4\frac{385}{35} = 11 & | & 0
\end{array}$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 1995 i 1190 jest ostatnia reszta 35 różna od zera.
Zauważmy, że reszata 35 jest rownież dzielnikiem reszt 805 i 385 oraz liczb 1190 *i* 1995.

Zadanie 0.5 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb $a = 616$ i $b = 847$ wzorując się na powyższych przykładach.*

Zadanie 0.6 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb $a = 2048$ i $b = 1024$*

Teraz podamy ogólny schemat Algorytmu Euklidesa w rachunku symbolicznym

Niech r_0 i r_1 będą dwoma liczbami naturalnymi dla których chcemy znaleźć największy wspólny dzielnik.
Zakładamy, że $r_0 > r_1 > 0$.

Zadanie 0.7 *; Znajdź największy wspólny dzielnik liczb r_0 i r_1.*

Zauważamy, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to rownież jest dzielnikiem ich sumy $r_0 + r_1$ i różnicy $r_0 - r_1$.
Na przykład, liczba $d = 8$ jest dzielnikiem liczb

$$r_0 = 40, ; \quad r_1 = 24, \quad bo \quad 40 : 8 = 5, \quad 24 : 8 = 3$$

$d = 8$ jest również dzielnikiem sumy i rónicy

$$r_0 + r_1 = 40 + 24 = 64, \quad r_0 - r_1 = 40 - 24 = 16,$$

bo $64 : 8 = 8, \quad i \quad 16 : 8 = 2.$
Wykonując symboliczne dzielenie

$$\frac{r_0}{r_1} = k_0 + \frac{r_2}{r_1}$$

obliczamy resztę

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1.$$

Na przykład, wykonując dzielenie

$$\frac{40}{24} = 1 + \frac{16}{24},$$

obliczamy resztę

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1 = 40 - 1 * 24 = 16$$

podzielną przez $d = 8$.
Tutaj k_0 jest całością z dzielenia r_0/r_1. W powyższym przyładzie mamy

$$r_2 = 16, \quad k_0 = 1, \quad \frac{16}{8} = 2$$

Teraz staje się jasne, że jeżeli liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to jest również dzielnikiem reszty r_2.

Kolejne reszty z dzielenia obliczamy według schematu tak długo aż kolejna obliczona reszta $r_m = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
a = r_0, \quad b = r_1 & | & reszta \\
-------- & & --- \\
\dfrac{r_0}{r_1} = k_0 + \dfrac{r_2}{r_1} & | & r_2 = r_0 - k_0 * r_1 \\
\dfrac{r_1}{r_2} = k_1 + \dfrac{r_3}{r_2} & | & r_3 = r_1 - k_1 * r_2 \\
\dfrac{r_2}{r_3} = k_2 + \dfrac{r_4}{r_3} & | & r_4 = r_2 - k_2 * r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{r_{m-2}}{r_{m-3}} = k_{m-2} + \dfrac{r_m}{r_{m-1}} & | & r_m = r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1} \\
\dfrac{r_{m-1}}{r_m} = k_{m-1} & | & r_{m+1} = 0
\end{array}$$

Ciąg reszt $r_0 > r_1 > r_2 \cdots > r_{m-1} > r_m$ jest malejący. Ostatnia reszta z dzielenia r_m różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0$ i $b = r_1$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik r_m liczb r_0 i r_1 jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt $r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_2, r_1, r_0$

Przykład 0.7 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 975 *i* 690

Rozwiązanie.
Stosujemy wyżej opisany algorytm Euklidesa obliczajmy kolejne reszty

$$\begin{array}{ccc}
a = r_0 = 975, \quad b = r_1 = 690 & | & reszta \\
----------- & & ---------- \\
\dfrac{975}{690} = 1 + \dfrac{285}{690} & | & r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\
\dfrac{690}{285} = 2 + \dfrac{120}{285} & | & r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\
\dfrac{285}{120} = 2 + \dfrac{45}{120} & | & r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\
\dfrac{120}{45} = 2 + \dfrac{30}{45} & | & r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\
\dfrac{45}{30} = 1 + \dfrac{15}{30} & | & r_6 = 45 - 1 * 30 = 15 \\
\dfrac{30}{15} = 2 & | & r_7 = 0
\end{array}$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym

dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0 = 975$ i $b = r_1 = 690$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = 15$ liczb $r_0 = 975$ i $r_1 = 690$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15$$

0.4 Najmniejsza wspólna wielokrotna

Wspólną wielokrotną dwóch liczb naturalnych jest trzecia liczba naturalna, która jest podzielna przez obie te liczby.

Przykład 0.1 *Dla liczb* 5 *i* 7 *wspólną wielkrotną jest ich iloczyn* $5 * 7 = 35$. *Liczba* 35 *jest najmniejsza wspólna wielokrotna liczb* 5 *i* 7. *Inną wspólną wielokrotną liczb* 5 *i* 7 *jest liczba* 70, *ponieważ* $70 : 5 = 24$ *i* $70 : 7 = 10$. *Jednak* 70 *nie jest najmniesza̧ wspólną wielokrotną liczb* 5 *i* 7.

Sposób znajdowania najmniejszej wspólnej wielokrotnej oparty jest na rozkładzie liczb na czynniki pierwsze. Wyjaśniamy to na przykładach

Przykład 0.2 *Znajdz najmniejszą wspólną wielokrotną liczb* 120 *i* 210
Rozkładamy liczby 120 *i* 210 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2, \\ 60 & 2, \\ 30 & 2, \\ 15 & 3, \\ 5 & 5 \\ 51 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array}$$

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : $2, 3$ i 5. Następnie do iloczynu $2 * 3 * 5$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki 4 i 7.
Najmniejszą wspólną wielokrotną jest iloczyn tych czynników

$$2 * 3 * 5 * 4 * 7 = 1540$$

Przykład 0.3 *Znajdz najmniejszą wspólną wielokrotną liczb* 910 *i* 1155
Rozkładamy liczby 910 *i* 1190 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{r|l} 910 & 2, \\ 455 & 5, \\ 91 & 7, \\ 13 & 13, \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : 5 i 7. Następnie do iloczynu $5 * 7$ dopisujemy czynniki, które się nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki $2, 3, 11, 13$.
Najmniejszą wspólną wielokrotną jest iloczyn tych czynników

$$5 * 7 * 2 * 3 * 11 * 13 = 30030$$

0.5 Zadania

Zadanie 0.8 *Rozłóż na czynniki pierwsze liczby*

(i) $a = 184$

(ii) $b = 6006$

Zadanie 0.9 *Podaj resztę z dzielenia liczby* a *przez liczbę* b

(i) $a = 254 \quad i \quad b = 15$

(ii) $b = 2672 \quad i \quad b = 848$

Zadanie 0.10 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 425 *i* 125

(i) przez rozkład tych liczb na czynniki pierwsze.

(ii) stosując Algorytm Euklidesa

[1]

Zadanie 0.11 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb*

$$2672 \ \ i \ \ 848$$

stosując Algorytm Euklidesa

Zadanie 0.12 *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotną liczb*

(i) $25 \ \ i \ \ 235$

(ii) $512 \ \ i \ \ 5040$

Zadanie 0.13 *Czy każdą liczbę pierwszą* p *można przedstawić w postaci iloczynu różnicy i sumy liczb naturalnych* a *i* b

Zadanie 0.14 *Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej* $p > 4$ *liczba* $(p-1)(p+1)$ *jest podzialna przez* 24

Zadanie 0.15 *Udowodnij, że nie istnieją liczby pierwsze* p, q, r *różne takie, że liczba*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

jest naturalna?

Zadanie 0.16 *Wykaż, że każdą liczbę pierwszą* $p > 2$ *można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.*

Zadanie 0.17 *Wyznacz wszystkie rozwiązania układu równań*

$$x + y = 180$$

$$NWD(x, y) = 30$$

[1] NWD(x,y) oznacza największy wspólny dzielnik liczby x i liczby y.