

Temat 3: Liczby wymierne. Ułamki

Przed sformulowaniem zadań przypominamy pojęcia podstawowe.

0.1 Ułamki zwykłe

Ułamek zwykły piszemy w ogólnej postaci

$$\frac{\overbrace{p}^{\text{licznik}}}{\underbrace{q}_{\text{mianownik}}}$$

gdzie licznik p jest dowolną liczbą całkowitą, a mianownik $q \neq 0$ jest również liczbą całkowitą różną od zera.

Przykład 0.1 *Ułamek zwykły*

$$\frac{\overbrace{3}^{\text{licznik}}}{\underbrace{4}_{\text{mianownik}}}$$

ma licznik $p = 3$ i mianownik $q = 4$

Zadanie 0.1 *Napisz 3 ułamki zwykłe i podaj ich liczniki i mianowniki.*

Wśród ułamków zwykłych wyróżniamy *ułamki właściwe i niewłaściwe*
Ułamek właściwy w ogólnej postaci

$$\frac{p}{q}, \quad p < q$$

ma licznik p mniejszy od mianownika q .

Na przykład, ułamki

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{25}{46}, \quad \frac{125}{347}$$

są właściwe, gdyż ich liczniki są mniejsze od mianowników. Zauważmy, że wartość każdego ułamka właściwego

$$\frac{p}{q} < 1, \quad p < q$$

jest mniejsza od 1

Ułamek niewłaściwy w ogólnej postaci

$$\frac{p}{q}, \quad p > q$$

ma licznik p większy od mianownika q .

Na przykład, ułamki

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{15}{8}, \quad \frac{25}{21}, \quad \frac{125}{114}$$

są niewłaściwe, gdyż ich liczniki są większe od mianowników. Zatem, wartość każdego ułamka niewłaściwego

$$\frac{p}{q} > 1, \quad p > q$$

jest większa od 1.

Jeżeli licznik ułamka równy jest mianownikowi tego ułamka, $p = q$, lub $q = 1$ to ten ułamek jest liczbą całkowitą.

Część całkowita ułamka zwykłego. Ułamek niewłaściwy można napisać wyróżniając jego część całkowitą i resztę w postaci ułamka właściwego. Ten zapis nazywamy *ułamkiem mieszanym*. Na przykład, ułamki

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{29}{5}$$

piszemy w postaci *ułamka mieszanego*

$$1\frac{1}{3}, \quad 2\frac{1}{4}, \quad 5\frac{4}{5}$$

Całość z ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$ oznaczamy symbolem $[\frac{p}{q}]$.¹

Całość z ułamka

$$[\frac{p}{q}] \leq \frac{p}{q}, \quad q \neq 0$$

jest największą liczbą całkowitą nie większą od ułamka $\frac{p}{q}$.

Przykład 0.2 Obliczamy całości z danych ułamków

$$\begin{aligned} [\frac{4}{3}] &= 1 & \text{bo} & & 1 & \text{jest największa liczba całkowita taka, ze} & 1 \leq [\frac{4}{3}] \\ [\frac{9}{4}] &= 2 & \text{bo} & & 2 & \text{jest największa liczba całkowita taka, ze} & 2 \leq [\frac{9}{4}] \\ [\frac{29}{5}] &= 5 & \text{bo} & & 5 & \text{jest największa liczba całkowita taka, ze} & 5 \leq [\frac{29}{5}] \end{aligned}$$

Przykład 0.3 Napisz liczby

$$(i) \quad 2\frac{2}{3}, \quad (ii) \quad 6\frac{3}{5}, \quad (iii) \quad 21\frac{3}{4}.$$

w postaci ułamka niewłaściwego

Obliczamy (i)

$$2\frac{2}{3} = \frac{2 * 3 + 2}{3} = \frac{8}{3}$$

Obliczamy (ii)

$$6\frac{3}{5} = \frac{6 * 5 + 3}{5} = \frac{33}{5}$$

Obliczamy (iii)

$$21\frac{3}{4} = \frac{21 * 4 + 3}{4} = \frac{87}{4}$$

¹Całość z liczby x oznaczana jest również symbolem $E[x]$. Wtedy symbol $E[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą $E[x] \leq x$, Litera E pochodzi od słowa angielskiego *Entire* - *całkowity*

Zadanie 0.2 *Napisz ułamki niewłaściwe*

$$(i) \frac{25}{3}, \quad (ii) \frac{131}{5}, \quad (iii) \frac{257}{4}.$$

w postaci ułamków mieszanych.

Zadanie 0.3 *Napisz ułamki mieszane*

$$(i) 7\frac{6}{5}, \quad (ii) 15\frac{3}{7}, \quad (iii) \frac{131}{24}.$$

w postaci ułamków niewłaściwych

0.2 Operacje arytmetyczne na ułamkach

Umiejętność sprawnego wykonywania operacji dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków jest podstawowa na drugim etapie nauczania matematyki.

Niżej podajemy przykłady z zadaniami z zakresu operacji arytmetycznych na ułamkach.

Dodawanie ułamków. Dodając ułamki w pierwszej kolejności należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 0.1 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} &= \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{24}{60} = \frac{20+15+24}{60} = \frac{59}{60} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{5} &= \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20} \end{aligned}$$

Zadanie 0.4 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{36} \\ (ii) \quad & \frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{23}{60} \\ (iii) \quad & \frac{121}{3} + \frac{251}{5} + \frac{53}{45} \end{aligned}$$

Odejmowanie ułamków. Odejmując ułamki w pierwszej kolejności należy znaleźć wspólny mianownik. Może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 0.2 *Odejmij ułamki*

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} - \frac{1}{3} &= \frac{5-3*1}{9} = \frac{2}{9} \\ \frac{33}{25} - \frac{21}{50} &= \frac{2*33-21}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} \\ \frac{14}{15} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} &= \frac{14-3*2+5*2}{15} = \frac{14-6+10}{15} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \\ \frac{253}{500} - \frac{126}{1000} &= \frac{2*253-126}{1000} = \frac{506-126}{1000} = \frac{380}{1000} = \frac{38}{100} = \frac{19}{50} \end{aligned}$$

Zadanie 0.5 *Odejmij ułamki*

$$(i) \quad \frac{38}{9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$(ii) \quad \frac{33}{4} - \frac{21}{5} - \frac{1}{10}$$

$$(iii) \quad 2\frac{14}{15} - \frac{2}{5} - \frac{5}{6}$$

Mnożenie ułamków. Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu:

licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0, \quad t \neq 0$$

Przykład 0.3 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273} = \frac{70}{91}$$

Zadanie 0.6 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{3}{7} * \frac{13}{15}$$

$$(b) \quad \frac{25}{33} * \frac{3}{5}$$

Dzielenie ułamków. Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu:

licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0, \quad p, t \neq 0$$

Przykład 0.4 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 * 5}{4 * 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273}$$

Zadanie 0.7 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{5}{8} : \frac{3}{7}$$

$$(b) \quad \frac{15}{45} : \frac{27}{25}$$

0.3 Rozszerzanie i upraszczanie ułamków zwyczajnych

Mnożąc licznik i mianownik ułamka zwyczajnego przez liczbę różną od zera nie zmieniamy wartości tego ułamka.

Mianowicie, dla dowolnej liczby $c \neq 0$ i dla każdego ułamka zwyczajnego zachodzi równość

$$\frac{p * c}{q * c} = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad c \neq 0$$

Przykład 0.4 Dla $c = 8$ i dla ułamka

$$\frac{5 * 8}{7 * 8} = \frac{5}{7}$$

Podobnie dzieląc licznik i mianownik ułamka zwyczajnego przez liczbę różną od zera nie zmieniamy wartości tego ułamka.

Mianowicie, dla dowolnej liczby $c \neq 0$ i dla każdego ułamka zwyczajnego zachodzi równość

$$\frac{p : c}{q : c} = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad c \neq 0$$

Przykład 0.5 Upraszczamy ułamek dzieląc jego licznik i mianownik przez 8

$$\frac{40}{56} = \frac{40 : 8}{56 : 8} = \frac{5}{7}$$

Zadanie 0.8 Uprość ułamki

$$(i) \quad \frac{8}{124}$$

$$(ii) \quad \frac{135}{275}$$

$$(iii) \quad \frac{2048}{124}$$

0.4 Liczby wymierne

Definition 0.1 Liczbami wymiernymi nazywamy ułamki postaci

$$\frac{p}{q}, \quad q \neq 0,$$

których liczniki p i mianowniki q , $q \neq 0$ są liczbami całkowitymi.

Na przykład, ułamki

$$\dots - \frac{17}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \dots$$

są liczbami wymiernymi.

0.5 Wyrażenia arytmetyczne.

Wartość wyrażenia arytmetycznego obliczamy zachowując kolejność wykonywania operacji arytmetycznych

1. mnożenie *
2. dzielenie : lub /
3. dodawanie +
4. odejmowanie -

Zadanie 0.9 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}$$

Zadanie 0.10 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Zadanie 0.11 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych w wyrażeniach z nawiasami ustalają nawiasy.

Zadanie 0.12 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

Zadanie 0.13 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

Zadanie 0.14 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego

$$\frac{(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})}{(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})}$$

0.6 Wyrażenia algebraiczne.

Wyrażenie algebraiczne staje się wyrażeniem arytmetycznym po podstawieniu wartości na jego parametry. Wtedy, po podstawieniu wartości parametrów obliczamy jego wartość zachowując kolejność wykonywania operacji arytmetycznych

1. mnożenie *
2. dzielenie : lub /
3. dodawanie +
4. odejmowanie -

Zadanie 0.15 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $a = 2$

$$\frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{3} + \frac{a}{4}}$$

Zadanie 0.16 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $b = 1$

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}}$$

Zadanie 0.17 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $c = 3$

$$\frac{\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{3} * \frac{3}{c}}{\frac{c}{3} * \frac{1}{c} + \frac{3}{c} * \frac{c}{3}}$$

Kolejność wykonywania operacji arytmetycznych w wyrażeniach z nawiasami ustalają nawiasy.

Zadanie 0.18 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $a = 2$

$$\frac{(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})(\frac{2}{3} - \frac{a}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{a}{4})(\frac{4}{a} + \frac{a}{4})}$$

Zadanie 0.19 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Zadanie 0.20 Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

Prof. dr Tadeusz STYŚ

Warszawa, 30 kwiecień 2018