Temat 2: Cechy podzielności. Dzielenie z resztą.

Cechy podzielności liczb naturalnych wynikają z ogólnego zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym, każdą liczbę n-cyfrową piszemy w postaci

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0 \\ &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 + \alpha_0 * 10^0 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$$

są cyframi liczby m o wartościach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Przykład 0.1 *Liczba dwucyfrowa, gdy* $n = 2$

$$\alpha_1\alpha_0 = 37$$

ma cyfrę dziesiątek $\alpha_1 = 3$ *i cyfrę jedności* $\alpha_0 = 7$

Niżej podamy proste dowody i przykłady z zadaniami cech podzielności liczb naturalnych przez 3, 9 i 5 oraz zasadę tworzenia cech podzielności przez inne liczby naturalne.

0.1 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 3 lub przez 9

Liczba naturalna n-cyfrowa

$$m = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0$$

jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr

$$\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0$$

dzieli się przez 3. Ponadto, jeżeli suma cyfr liczby m dzieli się przez 9 to liczba m również jest podzielna przez 9.
Zanim podamy dowód tej cechy, rozpatrzmy kilka przykładów jej zastosowania.

Przykład 0.2 *Niech* $m = 24$. *Cyfry tej liczby dwucyfrowej, gdy* $n = 2$, *to* $\alpha_1 = 2$ *i* $\alpha_0 = 4$
Suma cyfr

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 2 + 4 = 6$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 24 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$24 : 3 = 8$$

Przykład 0.3 *Niech* $m = 381$. *Cyfry tej liczby trzycyfrowej, gdy* $n = 3$, *to* $\alpha_2 = 2 = 3$, $\alpha_1 = 8$ *i* $\alpha_0 = 1$
Suma cyfr

$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 3 + 8 + 1 = 12$$

jest podzielna przez 3, *bo* $12 : 3 = 4$. *Zatem liczba* 381 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$381 : 3 = 127$$

Przykład 0.4 *Niech* $m = 5673$. *Cyfry tej liczby czterocyfrowej* $n = 4$, *to* $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 7$ *i* $\alpha_0 = 3$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 5 + 6 + 7 + 3 = 21$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$5673 : 3 = 1891$$

Przykład 0.5 *Niech* $m = 48537$. *Cytry tej liczby pięciocyfrowej, gdy* $n = 5$, *to* $\alpha_4 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ *i* $\alpha_0 = 7$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 4 + 8 + 5 + 3 + 7 = 27$$

jest podzielna przez 3 *i przez* 9. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3 *i przez* 9. *Rzeczywiście*

$$48537 : 3 = 16177, \quad i \quad 48537 : 9 = 5393$$

Dowód w przypadku liczb dwucyfrowych. Liczby dwucyfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned}
\alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_1 * 10 + \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\
&= \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\
&= 9 * \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_0)
\end{aligned}$$

zawiera składnik $9 * \alpha_1$ z czynnikiem 9, zatem ten składnik jest podzielny przez 3 i przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym. W tym przykładzie jest to warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

Powtórzmy dowód cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Dowód w przypadku liczb trzycyfrowych. Liczby trzycfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 \\
&\quad -(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= \alpha_2 * (100 - 1) + \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= 99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0)
\end{aligned}
$$

zawiera składnik $99 * \alpha_2 + \ 9 * \alpha_1$, który dzieli się przez 3 i przez 9. Zatem, jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9 to liczba m jest również podzielna przez 3 lub przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

W przypadku ogólnym dla liczb *n-cyfrowych*, schemat dowodu cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 jest taki sam jak dla liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych.

0.2 Zadania

Zadanie 0.1 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 2546 : 3, \qquad (ii) \qquad 5796 : 9$$

Zadanie 0.2 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 455 : 13, \qquad (ii) \qquad 18011 : 31$$

Zadanie 0.3 *Wykonaj dzielenie pisemne z resztą*

$$(i) \qquad 2547 : 3, \qquad (ii) \qquad 5766 : 9$$

Zadanie 0.4 .

(a) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3. Wypisz 5 kolejnych liczb podzielnych przez 3, zaczynając od liczby* 42.

(b) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z reszta 1. Wypisz 4 kolejne liczby podzielne przez 3 z reszytą 1, zaczynając od liczby* 22

(c) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 2. Wypisz pierwsze 4 kolejne liczby naturalne podzielne przez 3 z resztą 2.*

Zadanie 0.5 *Udowodnij, że liczba cztero-cyfrowa* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$, *gdy* $n = 4$ *jest podzielna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma jej cyfr*

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3*. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *była podzielna przez* 9*.*

Zadanie 0.6 *Udowodnij, że liczba czterocyfrowa* $\alpha_3\alpha_2 25$ *jest podzielna przez* 25 *dla dowolnych cyfr* α_3, α_2*.*

Zadanie 0.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe podzielne przez* 3*. Zaznacz te liczby dwucyfrowe, które są również podzielne przez* 9*.*

Zadanie 0.8 *Suma 3 kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 równa jest* 36*. Znajdź te liczby*

Zadanie 0.9 100 *odjąć 3 kolejne liczby naturalne podzielne przez 3 równa jest* 1*. Znajdź te liczby.*

0.3 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 5

Bardzo łatwo rozpoznać liczbę m, która jest podzielna przez 5. Mianowicie, zachodzi następujące cecha podzielności:

Liczba naturalna m *jest podzielna przez* 5 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfra jedności jest równa* 0 *lub* 5*.*

Przykład 0.6 *Łatwo sprawdzamy, że liczby*

$$30, 35, 40, 45, 150, 155, 2360, 2365, 9800, 9855, 9890, 9995$$

są podzielne przez 5

Dowód cechy podzielności liczby m **przez** 5**.**

Dla uproszczenia , rozpatrzymy liczbę trzycyfrową m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5. Wtedy liczba m rozkłada się na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalą. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 + 5 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1 + 1) \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym liczb n-cyfrowych, które mają cyfrę jedności 0 lub 5 mamy również rozkład liczby m na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalną. Mianowicie

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 \\ &= 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$m = 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_2 + \alpha_1)$$

Zatem w przypadku ogólnym liczba m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5 jest podzielna przez 5.

0.4 Dzielenie liczb przez 3 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 3 lub dzieli się przez 3 z resztą 1 lub z resztą 2.

Wtedy piszemy

$$m = 3k \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3$$

$$m = 3k + 1 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3, \quad reszta \ 1$$

$$m = 3k + 2 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3, \quad reszta \ 2$$

Przykład 0.7 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- $33 : 3 = 11 \quad reszta \quad 0$
- $34 : 3 = 11 \quad reszta \quad 1$
- $35 : 3 = 11 \quad reszta \quad 2$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{33}{3} = 11 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3} \quad reszta \quad 2$

Przykład 0.8 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 36. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3

$$3k - 3, \ 3k, \ \ 3k + 3$$

Suma tych liczb

$$(3k - 3) + 3k + (3k + 3) = 9k = 36$$

Skąd obliczamy

$$9k = 36, \qquad k = 36 : 9 \qquad k = 4.$$

Odpowiedź:

$$3k - 3 = 3 * 4 - 3 = 9,$$

$$3k = 3 * 4 = 12,$$

$$3k + 3 = 3 * 4 + 1 = 15$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 3, których suma równa jest 36 są liczby

$$9, \qquad 12 \qquad 15$$

Sprawdzenie:

$$9 + 12 + 15 = 36$$

Zadanie 0.10 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 72. *Jakie to liczby?*

Zadanie 0.11 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 1 *jest równa* 75. *Jakie to liczby?*

Zadanie 0.12 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 2 *jest równa* 105. *Jakie to liczby?*

0.5 Dzielenie liczb przez 5 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 5 lub dzieli się przez 5 z resztą 1 lub resztą 2 lub z resztą 3 lub z resztą 4.

Wtedy piszemy

$$m = 5k \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5$$

$$m = 5k + 1 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 1$$

$$m = 5k + 2 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 2$$

$$m = 5k + 3 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 3$$

$$m = 5k + 4 \quad gdy \;\; liczba \;\; m \;\; jest \;\; podzielna \;\; przez \;\; 5, \quad reszta \;\; 4$$

Przykład 0.9 *Wykonaj dzielenie przez* 5 *z resztą*

- $35 : 5 = 7 \quad reszta \quad 0$
- $36 : 5 = 7 \quad reszta \quad 1$
- $37 : 5 = 7 \quad reszta \quad 2$
- $38 : 5 = 7 \quad reszta \quad 3$
- $39 : 5 = 7 \quad reszta \quad 4$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{35}{5} = 7 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 2$
- $\frac{38}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 3$
- $\frac{39}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 4$

Przykład 0.10 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *równa jest* 45. *Jakie to liczby?*

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5
Rozwiązanie.

$$5k-5,\ 5k,\ \ 5k+5$$

Suma tych liczb
$$(5k-5)+5k+(5k+5)=15k=45$$

Skąd obliczamy k
$$15k=45, \quad k=45:15 \quad k=3.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 45

$$5k-5=5*3-5=10,$$

$$5k=5*3=15,$$

$$5k+5=5*3+5=20$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$10, \quad 15 \quad 20$$

Sprawdzenie:
$$10+15+20=45$$

Zadanie 0.13 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 1 *równa jest* 108. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.
Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 1

$$5k+1,\ 5k+6,\ \ 5k+11$$

Suma tych liczb
$$(5k+1)+(5k+6)+(5k+11)=15k+18=108$$

Skąd obliczamy k
$$15k=90, \quad k=90:15 \quad k=6.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 108

$$5k+1=5=5*6+1+31,$$

$$5k+6=5*6+6=36,$$

$$5k+11=5*6+11=41$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$31, \quad 36 \quad 41$$

Sprawdzenie:
$$31+36+41=108$$

Zadanie 0.14 *Suma dwóch kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *jest równa* 79. *Jakie to liczby?*

Zadanie 0.15 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 3 *jest równa* 129. *Jakie to liczby?*

Zadanie 0.16 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 2546 : 3, \qquad (ii) \qquad 5796 : 9$$

Zadanie 0.17 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 455 : 13, \qquad (ii) \qquad 18011 : 31$$

Zadanie 0.18 *Wykonaj dzielenie pisemne z resztą*

$$(i) \qquad 2547 : 3, \qquad (ii) \qquad 5766 : 9$$

Zadanie 0.19 .

(a) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 5. Wypisz 4 kolejne liczby podzielne przez 5, zaczynając od liczb 25.

(b) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 5 z reszta 1. Wypisz 4 kolejne liczby podzielne przez 5 z reszytą 1, zaczynając od liczby 16.

(c) Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 5 z resztą 3. Wypisz pierwsze 4 kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 3.

Zadanie 0.20 *Udowodnij, że liczba* $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *jest podizelna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr*

$$\alpha_4\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3. *Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba* $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *była podzielna przez* 9.

Zadanie 0.21 *Podaj najmniejszą liczbę naturalą większą od liczby 2018 , która ma sumę cyfr 11.*

Zadanie 0.22 *Udowodnij, że liczba czterocyfrowa* $\alpha_3\alpha_2 25$ *jest podzielna przez* 25 *dla dowolnych cyfr* α_3, α_2.

Zadanie 0.23 *Bracia Antek, Bolek, Wacek i Staś dostali od ojca razem 400 zł na zakupy szkolne. Bolek wydał o 4zł więcej niż Antek, Wacek wydał o 3 zł mniej niż Bolek, Staś wydał tyle samo co Wacek.*
Ile każdy z nich wydał na zakupy szkolne?

Zadanie 0.24 *W gospodarstwie były krowy, owce, kury i gęsi. Owiec było 2 razy więcej niż krów, gęsi było 4 razy więcej niż owiec, kur było 6 razy więcej niż gęsi. Razem mieli 124 nogi. Ile było w gospodarstwie krów, owiec, kur i gęsi ?*