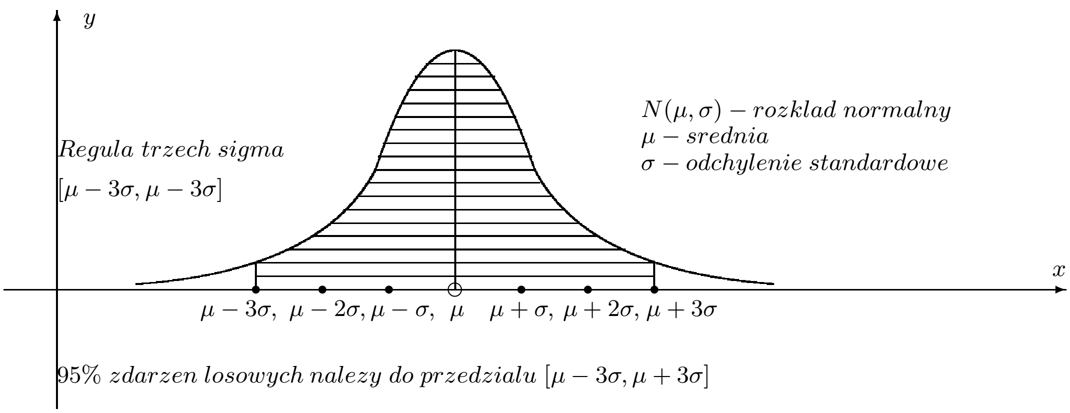
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



STATYSTYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018[1]

[1] Projekt jedenasty

Contents

Chapter 1

Statystyka Opisowa i Prawdopodobieństwo

Pierwszym i ważnym etapem opracowań statystycznych jest zbieranie i prezetacja danych. Najważniejsze dane statystyczne podawane są w każdym roku przez Główny Urząd Statystyczny (GUS) z siedzibą w Warszawie. Dotyczą one informacji o ludności w Polsce, dane o wzorście w przemyśle i rolnictwie, w ekonowmi i finansach. Te dane stanowią ważną informację dla planowania i administracji państwa. Oprócz tego dane statystyczne zbierane są w ankietach z pytaniami o szczególnym znaczeniu. Na przykład w sondażach i prognozach w wyborach do sejmu i w ważnych decyzjach administrcji w których głos społeczeństwa ma istotne znaczenie. Zebrane dane statystyczne przedstawiamy w tabelach i ilustrujemy na diagramach. Stosowane są różne formy diagramów. Najbardziej powszechne diagramy są w formie słupków lub koła z zaznaczeniem kolorów lub danych liczbowych lub w procentach. Zatem diagramy są prostym i ważnym sposobem prezetacji danych statystycznych.

1.1 Przykłady Danych Statystycznych i Diagramów

Dane statystyczne zapisujemy w tablicach z opisem ich znaczenia i wartości liczbowych.

Przykład 1.1 *W zespole szkół było Przedszkole, Szkoła Podstawowa, Gimnazjum i Liceum. W poniżeszej tabeli zebrano informacje dotyczące liczby uczniów*

Rodzaj Szkoły	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców	RAZEM
Przedszkole (PSz)	150	250	400
Szkoła Podstawowa (SzP)	220	210	430
Gimnazjum (Gim)	160	140	300
Liceum (Lic)	110	90	190

W niżej podanych diagramach w formie słupków i koła podane są wykresy dziewcząt, chłopców i razem uczniów w Przedszlu (Psz), w Szkole Podstawowej (szP), w Gimnazjum (Gim(i w Liceuam (Lic).
Legenda: Dziewczęta słupek pierwszy, chłopcy słupek drugi i liczba uczniów raze słupek trzeci. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkoł. Legenda: Dziewczęta koło pierwsze, chłopcy koło drugie i liczba uczniów raze koło trzecie. Wykresy są powtórzone dla każdej z czterech szkoł.

1.2 Wartość Średnia i Mediana

Ważnymi parametrami danych statystycznych są wartość średnia i mediana.
Wartość Średnia Arytmetyczna. Wartością średnią arytmetyczną danych n liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ nazywamy liczbę

$$\text{Srednia Arytmetyczna} \ = \ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Wartość Średnia Arytmetyczna Ważona. Bardziej ogólnym pojęciem średniej jest pojęcie średniej arytmetycznej ważonej. Mianowicie, niech wagami bedą liczby dodatnie $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ takie, że suma

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = 1, \quad \rho_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Wtedy średnią ważoną nazywamy następującą sumę iloczynów

$$\text{Srednia Arytmetyczna Wazona} \ = \ \rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n$$

Istotnie, w przypadku szczególnym, gdy wagi są równe

$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n = \frac{1}{n}$$

wtedy średnia arytmytyczna ważona jest poprostu średnią arytmetyczną.

Mediana. Dla danych statystycznych znajdujemy ich mediane to znaczy wartość, która leży w środku danych. Mianowicie, w pierwszej kolejności sortujemy dane porządkując je od najmiejszej do największej lub od największej do najmieszej. Wtedy liczba, która leży w równej odległości od począdku i od końca uporządkowanych danych nazywa się mmedianą. Może zdażyć się że nie ma takiej jednej liczby, natomiast są dwie liczby obok siebie, które leżą w tej samaej odległości pierwsza od począdku a druga od końca. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna.
Niżej, wyjaśniamy to na przykładach.

Przykład 1.2 *Rozpatrzmy następujące dane:*

$$(i) \quad 2, 1, 6, 8, 3, 2, 10, 12, 11$$

$$(ii) \quad 9, 4, 2, 7, 5, 1, 3, 10, 15, 17, 16$$

Rozwiązanie (i). Dane $2, 1, 5, 8, 3, 2, 10, 12, 11$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej

o]wnym

$$1, 2, 2, 3, 6, 8, 10, 11, 12$$

Zauważamy, że liczba 6 jest odległa od początku o cztery pozycje i od końca również o cztery pozycje. Zatem liczba 6 jest medianą danych (i).
Rozwiązanie (ii). Dane $0, -1, 9, 4, 2, 7, 5, 1, 3, 10, 15, 17, 16$ porządkujemy w kierunku rosnącym od najmieszej do największej

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 15, 16, 17$$

Zauważamy, że liczba 4 jest odległa od początku o pięć pozycji, a liczba 5 jest odległa od końca również o pięć pozycji. Zatem mamy dwie liczby w środku danych 4 i 5. Wtedy medianą jest ich średnia arytmetyczna, to znaczy $\dfrac{4+5}{2} = 4.5$. Odpowiedź: medianą danych (ii) jest liczba 4.5

1.2.1 Correlacja Danych Statystycznych

Rozpatrzmy dwa ciągi danych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

o tej samej liczbie elementów n.

Definition 1.1 *Correlacją danych statystycznych*

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

nazywamy następujący iloraz:

$$Cor(a, b) = \frac{a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}},$$

Dane statystyczne zapisujemy również w ich unormowanej formie. Mianowicie, niech

$$\begin{aligned} \hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\} &= \frac{\{a_1, a_2, ..., a_n\}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \\ \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\} &= \frac{\{b_1, b_2, ..., b_n\}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdzie

$$\hat{a}_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}},$$
$$\hat{a}_2 = \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\hat{a}_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}, \quad \hat{b}_n = \frac{b_n}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}$$

Zauważamy, że dane statystyczne (1.1) w unormowanej formie spełniają następujące warunki:

$$\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \cdots + \hat{a}_n^2 = 1, ; \quad \hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + \cdots + \hat{b}_n^2 = 1$$

Wtedy correlacja pomiędzy danymi a i b oraz correlacja pomiędzy danymi unormowanymi $\hat{a}$ i $\hat{b}$ jest ta sama i określana jak następuje:

Definition 1.2 *Correlacją danych statystycznych*

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \qquad b = \{b_1, b_2, ..., b_n\},$$

lub

$$\hat{a} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_n\}, \qquad \hat{b} = \{\hat{b}_1, \hat{b}_2, ..., \hat{b}_n\}$$

nazywamy sumę następujących iloczynów:

$$Cor(a, b) = Cor(\hat{a}\ \hat{b}) = \hat{a}_1\ \hat{b}_1 + \hat{a}_2\ \hat{b}_2 + \cdots + \hat{a}_n\ \hat{b}_n,$$

Przykład 1.3 *Oblicz correlację pomiędzy danymi*

$$a = \{2, 1, 5, 8\}, \qquad b = \{4, 3, 9, 3\}$$

Rozwiązanie. Podstawiając do wzoru dane

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 8,$$

$$b_1 = 4, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 3$$

obliczamy współczynnik correlacji

$$\begin{aligned} Cor(a, b) &= \frac{a_1\ b_1 + a_2\ b_2 + \cdots + a_n\ b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \\ &= \frac{2 * 4 + 1 * 3 + 5 * 9 + 8 * 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2 + 8^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 9^2 + 3^2}} = 0.769444, \end{aligned}$$

1.3 Wariancja i Odchylenie Standardowe

Wariancja σ^2 danych statystycznych

$$a = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

związana jest z ich średnią arytmetyczną

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

następującym wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n}$$

Czytamy sigma.
Odchylenie Standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Przykład 1.4 *Oblicz wariancje i odchylenie standardowe następujących danych:*

$$(i) \quad a = \{3, -1, 8, 4\}, \qquad (ii) \quad b = \{12, 4, 8, 6\}.$$

Rozwiązanie (i). Rozwiązanie jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{3 - 1 + 8 + 4}{4} = 3.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(3 - 3.5)^2 + (-1 - 3.5)^2 + (8 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)}{4} = 10.31 \end{aligned}$$

oraz odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 3.21131$$

Rozwiązanie (ii). Podobnie rozwiązanie przykładu (ii) jest prostym i bezpośrednim podstawieniem danych do wzorów. Najpierw obliczamy wartość średnią

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{12 + 4 + 8 + 6}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

następnie obliczamy wariancję

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \cdots + (a_n - s)^2}{n} \\ &= \frac{(12 - 7.5)^2 + (4 - 7.5)^2 + (8 - 7.5)^2 + (6 - 7.5)^2}{4} = 8.75 \end{aligned}$$

oraz chylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10.31} = 2.95804$$

1.4 Prawdopodobieństwo

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa pierwsi ogłosili Pascal i Fermat w połowie XVII-go wieku. Następnie w wiekach XVIII i XIX rachunek prawdopodobieństwa w prowadzono w zagadnieniach ubezpieczeń i demografii. W tym czasie ważnym odkryciem było prawo wielkich liczb J. Bernoulliego i natępnie wyniki prac A. Moivre, P. Laplasa i S. Poissona. Czebyszewa, Browna i Kołmogoroawa.
Prawdopodobieństwo $P(A)$ pojawienia się zdarzenia A w N doświadczeniach rozumniane jest jako iloraz $\mu(A)$ ilości zajścia zdarzenia A do ilości N wszystkich wykonanych doświadczeń. Zatem iloraz

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{N}$$

jest częstością lub prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A w N doświadczeniach. Pojęcie prawdopodobieństwa jako częstości pojawienia się zdarzenia A w N doświadczeniach opisujemy w następujących przykładach:

Przykład 1.5 *Niech doświadczeniem będzie rzut monetą i odczyt orła lub reszki. Zatem są dwa możliwe wyniki jednego rzutu monetą: orzeł lub reszka i nie ma innych możliwości. Te dwa zdarzenia losowe oznaczamy przez* ω_1, ω_2 *i nazywamy zdarzeniami elementarnymi. Wykonano* $N = 100$ *rzutów monetą i zapiszno liczbę* $\mu(\omega_1) = 49$ *pojawienia się orła. W tym doświadczeniu częstością lub prawdopodobieństwem* $P(\omega_1)$ *pojawienia się orła jest iloraz liczby orłów* $\mu(\omega_1) = 49$ *do ilości wszystkich doświadczeń* $N = 100$

$$P(\omega_1) = \frac{\mu(A)}{N} = \frac{49}{100} = 0.49$$

Drugie zdarzenie elementarne ω_2 *to jest pojawienia się reszki ma prawdopodobieństwo*

$$P(\omega_2) = \frac{100 - \mu(\omega_1)}{N} = \frac{100 - 49}{100} = \frac{51}{100} = 0.51$$

gdyż w $N = 100$ *doświadczeniach było* $\mu(\omega_2) = 100 - \mu(\omega_1) = 100 - 49 = 51$ *reszek.*
Zauważamy, że zdarzenie złożone ω *pojawienia się orła lub reszki jest zdarzeniem pewnym. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równe jest jeden,* $P(\omega) = 1$*. Innym zdarzeniem, które formalnie zalicza się do zdarzeń jest zdarzenie niemożliwe* ω_0*. Na przkład po rzucie monetą nie pojawi się ani orzeł ani reszka. Wtedy przyjmuje się prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równe zero,* $P(\omega_0) = 0$.

Przykład 1.6 *W roku 2010 w pewnym szpitalu zarejestrowano 3000 porodów w tym było 1495 chłopców i 1505 dziewcząt. Oblicz częstość lub prawdopodobieństwo narodzin (a) następngo chłopca, (b) natępnej dziewczynki.*

Rozwiązanie. Niech doświadczeniem bedzie narodzenia dziecka w tym szpitalu. Istnieją dwa wyniki tego doświadczenia: 1. urodził się chłopiec, 2. urodziła się dziewczynka. Zatem w jednym doświadczeniu mamy dwa wyniki: 1. $\omega_1 =$"chlopic", 2. $\omega_2 =$"Dziewczynka". Tutaj zdarzeniamy elementarnymi są: ω_1 lub ω_2.
Na podstawie rejestracji narodzin w roku 2010 liczba wszystkich narodzonych dzieci $N = 3000$ w tym liczba chłopców $\mu_1(\omega_1) = 1495$ i liczba dziewczynek $\mu_2(\omega_2) = 1505$. Zatem prawdopodobieństwo, że natępnym narodzonym dzieckiem będzie chłopiec

$$(a) \qquad P_1(\omega_1) = \frac{\mu_1(\omega_1)}{N} = \frac{1495}{3000} = 0.498333$$

Natomiast prawdopodobieństwo, że następnym narodzonym dzieckiem będzie dziewycznka

$$(b) \qquad P_2(\omega_2) = \frac{\mu_2(\omega_2)}{N} = \frac{1505}{3000} = 0.501667$$

Przykład 1.7 *Niech doświadczeniem będzie rzut kostką i odczyt ilości oczek. Możliwy jest jeden z sześciu odczytów* $1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Zatem jest sześć następujących zdarzeń elemntarnych w doświadczniu rzutu kostką:*
zdarzenia ω_1, *gdy pojawi się 1*
zdarzenie ω_2, *gdy pojawi się 2*
zdarzenie ω_3, *gdy pojawi się 3*
zdarzenie ω_4, *gdy pojawi się 4*
zdarzenie ω_5, *gdy pojawi się 5*
zdarzenie ω_6, *gdy pojawi się 6*
Takie zdarzenia losowa nazywamy zdarzeniami elementarnymi. Wykonano $N = 100$ *rzutów kostką i zapiszno liczbę oczek*
$\mu(\omega_1) = 17$ *razy pojawienia się 1*
$\mu(\omega_2) = 16$ *razy pojawienia się 2*
$\mu(\omega_3) = 17$ *razy pojawienia się 3*
$\mu(\omega_4) = 19$ *razy pojawienia się 4*
$\mu(\omega_5) = 15$ *razy pojawienia się 5*
$\mu(\omega_6) = 17$ *razy pojawienia się 6*
W tym doświadczeniu częstością lub prawdopodobieństwem pojawienia się jed-

nego z sześciu wyników są następujące ilorazy:

$$P(\omega_1) = \frac{\mu(\omega_1)}{N} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$P(\omega_2) = \frac{\mu(\omega_2)}{N} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$P(\omega_3) = \frac{\mu(\omega_3)}{N} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$P(\omega_4) = \frac{\mu(\omega_4)}{N} = \frac{19}{100} = 0.19$$
$$P(\omega_5) = \frac{\mu(\omega_5)}{N} = \frac{15}{100} = 0.15$$
$$P(\omega_6) = \frac{\mu(\omega_6)}{N} = \frac{16}{100} = 0.16$$

Zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ *jest zbiorem zdarzeń elementarnych.*

1.4.1 Zdarzenia Jednakowo prawdopodobne

W powyższych przykładach rozpatrywaliśmy zdarzenia losowe jednakowo prawdopodobne. W rzucie monetą pojawienie się orła lub reszki zachodzi z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. To znaczy zdarzenia pojawienie się orła lub reszki są równoprawdopodobne. W rzucie kostką pojawienie się jednego oczka lub dwóch oczek lub trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek lub sześciu oczek zachodzi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$. To znaczy zdarzenia pojawienie się każdej liczby z sześciu oczek są równoprawdopodobne.
Zatem, możemy sformułować definicje Laplace'a prawdopodobieństwa dla N zdarzeń równoprawdopodobnych

Definition 1.3 *Jeżeli w zbiorze N zdrarzeń elementrnych wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowoprzwdopodobne to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego jest równe $\frac{n}{N}$, gdzie liczba n oznacza ilość zdarzeń sprzjających każedemu zdarzeniu losowemu.*

Rozpatrzymy następujący przykład:

Przykład 1.8 *Z talii 52 karty wyciągnięto losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$ następujących zdarzeń:*

(i) Zdareznie A polega na wyciągnięciu asa.

(ii) Zdareznie A polega na wyciągnięciu pika.

(iii) Zdareznie A polega na wyciągnięciu kiera kub trefla.

Rozwiązanie (i). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, gdyż prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty

jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest czerech asów, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnię cia asa jest $n = 4$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie asa jest równe $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
Rozwiązanie (ii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, gdyż prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest czerech 13 pików, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia pika jest $n = 13$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia pika jest równe $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
Rozwiązanie (iii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych, gdyż prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 kierów i 13 trefli, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia kiera lub trefla jest $n = 13+13 = 26$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie kiera lub trefla jest równe $P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.
Rozpatrzmy jeszcze przykład zdarzeń losowych, które nie są równoprawdopodobne.

Przykład 1.9 *Na liście w szkole jest 250 dziewcząt i 200 chłopców. Wybrano z listy losowo jedno nazwisko. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że to jest*
(a) dziewczynka, (b) chłopiec.

Rozwiązanie (a). Razem na liście jest $252 + 200 = 450$ uczniów. Zatem zdarzeń elementarnych jest $N = 450$. Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest dziewczynka równa się $n = 250$. Prawdopodobieństwo, że to jest dziewczynka $P(A) = \frac{250}{450} = \frac{5}{9}$.
Rozwiązanie (b). Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z listy chłopca. Razem na liście jest $252+200 = 450$ uczniów. Zatem zdarzeń elementarnych jest $N = 450$. Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest chłopiec równa się $n = 200$. Prawdopodobie'nstwo, że to jest dziewczynka $P(A) = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$.
Zauważmy, że prawdopodobieństwo wybrania z listy dziewczynki $P(A) = \frac{5}{9}$ jest różne od prawdopodobieństwa wybrania chłopca $P(A) = \frac{4}{9}$. Zatem zdarzenia losowe wyboru z listy dziewczynki lub chłopca nie są równoprawdopodobne.

1.4.2 Zdarzenia Losowe Złożone

Alternatywa, koniukcja i różnica zdarzeń losowych jest również zdarzeniem losowym. Zatem, wykonując te operacje na zbiorze zdarzeń elementarnych, otrzymujemy zdarzenia losowe złożone. Na przykład, w doświadczeniu z rzutem kostkca zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. W tym zbiorze zdarzeń elementarnych wyróżniamy następujące podzbiory jako zdarzenia złożone:

- Zauważmy, że zdarzenie A określone przez zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ wszystkich zdarzeń elementarnych, w doświadczeniu rzutem kostką, jest zdarzeniem pewnym. To znaczy $P(A) = 1$. Natomiast, każde ze zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A.

- oczekiwany wynik zdarzenia A to parzysta ilość oczek. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_2 lub ω_4 lub ω_6. To znaczy, gdy prawdziwa jest alternatywa $\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$. Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Natomiast zdrzenia $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ sprzyjają zdarzeniu A.

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek mniejsza niż 3.

  To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli wynik rzutu kostką jest jedno oczko lub dwa oczka. To znaczy prawdziwa jest alternatywa $\omega_1 \cup \omega_2$. Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbió $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$. Każde ze zdarzeń ω_1, ω_2 sprzyja zdarzeniu A

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek większa od 3. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_4 lub ω_5 lub ω_6. To znaczy, pradziwa jest alternatywa $\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$. Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Każde ze zdarzeń $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ sprzyja zdarzeniu A.

1.4.3 Relacje i Operacje na Ziorach i Zdarzeniach Losowych

Podstawową relacją w zbiorach jest ralacja przynależności elementu do zbioru. Mianowicie, relację, że element x należy do zbioru Ω, piszemy $x \in \Omega$. Również relację, że x nie jest elementem zbioru Ω, piszemy $x \notin \Omega$.
Zdarzenia losowe rozumiemy jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych. Operacje na zbiorach takie jak suma, iloczyn i różnica zbiorów odnoszą się również do działań na zdarzeniach losowych. Zatem, mamy równoważność

- Aletrnatywa zdarzeń A i B jest równoważna sumie zbiorów $A \cup B$, które określają zdarzenia A i B

- Koniukcja zdarzeń A i B jest równoważna koniukcji zbiorów $A \cap B$, które określają zdarzenia A i B

1.4.4 Zdarzenie Przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy zdarznie $A^{'}$, wtedy, gdy nie zaszło zdarzenie losowe A. Na przykład, niech zdarzeniem A będzie wynik rzutu kostką "parzysta liczba oczek": $\omega = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Wtedy zdarzenie przeciwne jest różnią zdarzeń $A^{'} = \Omega - \omega$. Piszemy dokładnie

$$A^{'} = \Omega - \omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} - \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

1.4.5 Alternatywa Zdarzeń

Alterternetywą zdarzeń losowych A i B jest $C = A \cup B$, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B. Na przykład, niech w rzucie kostką wynik zdarzenia A będzie liczba oczek większa od 5, natomiast wynik zdarzenia B niech będzie liczba oczek mniejsza od 2. Jasne, że zdarzenie $A = \omega_6$, natomiast wynik zdarzenia B jest zdarzenie elementarne ω_1. Zatem alternatywą tych zdarzeń jest podzbiór $\{\omega_1, \omega_6\} \subset \Omega$.

1.4.6 Koniukcja Zdarzeń

Koniukcją zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$C = A \cap B,$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B. Na przykład, niech w rzucie kostką wynik zdarzenia A będzie liczba oczek większa od 3, natomiast wynik zdarzenia B niech będzie liczba oczek mniejsza od 5. Jasne, że zdarzenie A określa podzbiór $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega$, oraz zdarzeniem B określa podzbiór $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega$. Zatem koniukcja zdarzenia $C = A \cap B$ zchodzi dla podzbioru $\{\omega_4\} \subset \Omega$.

1.4.7 Zdarzenia Rozłączne

Zdarzenia A i B wyłączają się, jeżeli ich koniukcja jest zbiorem pustym. To znaczy $A \cap B = \emptyset$.
Na przykład, w doświadczeniu rzutem kostką, niech zdarzenie $A = \{\omega_1, \omega_6\}$ oznacza pojawienie się jednego oczka lub sześciu oczek, natomiast zdarzenie $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ oznacza pojawienie się trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek. Te zdarzenia wyłączają się, gdyż ich koniukcja $A \cap B = \emptyset$ jest zbiorem pustym zdarzeń.

1.4.8 Różnica Zdarzeń Losowych

Różnica zdarzeń losowych $C = A - B$ zachodzi wtedy gdy zdarzenie A zachodzi, natomiast zdarzenie B nie zachodzi. Na przykład, niech wynikiem zdarzenia A bedzie parzysta ilość oczek, natomiast zdarzeniem B niech będzie ilość oczek podzielna przez 3. Jasne,że zdarzenie A zachodzi w podzbiorze $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$, natomiast zdarzenie B zachodzi w podzbiorze $\{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$. Zatem różnica $C = A - B$ zachodzi w podzbiorze $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} - \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\} \subset \Omega$.

1.5 Przykłady Zarzeń Losowych

Niżej podajemy przykłady zbiorów zdarzeń elementarnych i następujących operacji na ich podzbiorach: alternatywy, koniukcji, zdarzeń sprzyjających i zdarzeń przeciwnych.

Przykład 1.10

(i) Podaj zbiór zdarzeń elementarnych w doświadczeniu rzutem dwoma kostkami.

(ii) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A pojawienia się parzystej sumy liczby oczek w rzucie dwiema kostkami.

(iii) Podaj zdarzenie przeciwne A' do zdarzenia A.

Rozawiązanie (i) Możliwe są następujaące wyniki:

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 1, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 2, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 3, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 4, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 5, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 6, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.

Zatem wynikiem tego doświadczenia jest zbiór wszystkich możliwych par zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{array} \right\}$$

Rozwiązanie (ii). W rzucie dwiema kostkami suma oczek jest parzysta, jeżeli na pierwszej i jednocześnie na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek albo jednocześnie na pierwszej i na drugiej kostce pojawi się nie parzysta ilość oczek. Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zbiór zdarzeń sprzyjających

$$\omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1), & (1,3), & (1,5), \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), \\ (3,1), & (3,3), & (3,5), \\ (4,2), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,4), & (5,5), \\ (6,2), & (6,4), & (6,6), \end{array} \right\}$$

ma $\dfrac{36}{2} = 18$ elementy.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenie A, że w sumie wypadnie parzysta ilość oczek jest równe $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.
Rozwiązanie (iii). Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A w rzucie dwiema kostkami będzie nie parzysta suma oczek. To znaczy, że na pierwszej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek albo odwrotnie, na pierwszej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się nie parzysta liczba oczek.

Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu

$$\omega^{'} = \Omega - \omega = \left\{ \begin{array}{lll} (1,2), & (1,4), & (1,6), \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,2), & (5,4), & (5,6), \\ (6,1), & (6,3), & (6,5), \end{array} \right\}$$

Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu jest $\frac{36}{2} = 18$.
Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $A^{'}$, że w sumie wypadnie nie parzysta ilość oczek jest równe $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

1.6 Aksjomatyczna Definicja Prawdopodobieństwa

Laplace'a definicja prawdopodobieństwa jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu losowemu A do ilości N wszystkich zdarzeń elementarnych, w istocie ma swoje uzasadnienie w zbiorze zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Mianowicie, jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne, to znaczy, że pierwsze zdarzenie elementarne pojawia się z prawdopodobieństwem p_1, drugie z prawdopodobieństwem p_2, i tak dalej oraz $N-te$ zdarzenie elementarne pojawia się zprawdopodobieństwem p_N i te prawdopodobieństwa są równe

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = p,$$

wtedy

$$N\,p = 1 \quad i \quad p = \frac{1}{N}$$

Skąd otrzymamy prawdopodobieństwo jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Bardziej ogólnym modelem prawdopodobieństwa jest definicja aksjomatyczna, która obejmuje również zbiór zdarzenia elementarnych różno prawdopodobnych.

Definition 1.4 *Oznaczmy przez Ω zbiór zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem zdarzenia losowego $A \in \Omega$ nazywamy funkcje rzeczywistą $P(A)$, która spełnia nastepujące warunki:*

(a) $P(A) \geq 0$, *dla każdego zdaerzenia* $A \in \Omega$.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$ *zachodzi równość;* $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 49 - ciuliczb$

(c) $P(\Omega) = 1$.

Przykład 1.11 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, (iii) czterech liczb*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$, to znaczy $n_i \in \{1, 2, ..., 49\},\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?. Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli rożnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy symbolem Newtona

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \ * (49-6)!} = \frac{49!}{6! \ * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbiru Ω. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia równe jest

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Zauważmy, że zgodnie z aksomatyczną definicją prawdopodobieństw funkcja $P(A)$ określona na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω spełnia warunki definicji. Mianowicie, mamy

(a) $P(A) = \dfrac{1}{13983816} \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \Omega$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo-prawdopodobne.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$, jeżeli zdarzenie A zachodzi to zdarzenie B nie zachodzi.
Wtedy

$$P(A) = \frac{1}{13983816}, \quad \text{oraz} \quad P(B) = 0.$$

Zatem, mamy równość;

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13983816} + 0 = P(A) + P(B)$$

Podobnie, lub jeżeli zdarzenie B zachodzi to zdarzenie A nie zachodzi. Wtedy

$$P(A) = 0, \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{1}{13983816}.$$

Zatem, mamy równość:

$$P(A \cup B) = 0 + \frac{1}{13983816} = P(A) + P(B)$$

(c) Jeżeli wybierzemy wszystkie możliwe szóstki, to wśród nich pojawi się napewno losowana szóstka. To znaczy prawdopodobieństwo od wszystkich zdarzeń elementarnych $P(\Omega) = 1$.

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczb jest trafnych. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów. W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek ́jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

Rozwiązanie (iii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których cztery liczby jest trafne. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że dwie liczby nie trafione to mogą być pary k_1, k_2 lub k_1, k_3 lub ...., lub k_4, k_5 lub ...,lub k_5, k_6 Ilość tych par równa jest $\binom{6}{2} = 15$. Zatem, dwie z czterech liczb trafionych możemy zastąpić liczbami wylosowanymi w totolotku, ale nie trafionionymi przez gracza. W ten sposób otrzymujemy inną czwórkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{2} = 15$ pietnaście sposobów. W ten sposób otrzymujemy 15 różnych czwórek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każde dwie liczby z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na $\binom{43}{2} = 21 * 43$ sposobów na dwie liczby nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych czterech liczba jest $15 * 21 * 43 = 13545$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych czterech liczb z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{13545}{1398316} = 0.000969$$

Zadanie 1.1 *Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Gracz wytypowł sześć liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz trafił tylko w trzy liczby ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, sześciu liczb, pozostałe trzy liczby były nie trafione.*

1.7 Prawdopodobeństwo Warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia dowolnego zdarzenia A pod warunkiem, że już zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i definiujemy wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{gdy} \quad P(B) > 0.$$

Powyżesze określenie prawdopodobieństwa warunkowego wyjaśniamy na następującym przykładzie:

Przykład 1.12 *W stadzie jest razem N owiec i baranów. Wiadomo, że ilość owiec i baranów jest następująca:*

- *m baranów*
- *k baranów białych.*
- *razem białych owiec i baranów jest n, $k \leq n$.*

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany czworonogi jest biały, natomiast niech B oznacza zdarzenie, że wybrany losowo czworonogi jest baranem. Zakładając, że prawdopodobieństwo wyboru każdego czworonogiego owcy czy barana jest to samo. Wtedy obliczamy łatwo następujące prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{n}{N}, \qquad P(B) = \frac{m}{N}, \qquad P(A \cap B) = \frac{k}{N}$$

Wybierając losowo białego barana pytamy o warunkowe prawdopodobieństwo $P(A|B)$. To warunkowe prawdopodobeństwo wylosowania białego barana jest równe

$$P(A|B) = \frac{k}{m}$$

Skąd otrzymamy następujący wzór:

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{N}}{\frac{m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zgodnie z definicją, powyższy wzór określa warunkowe prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdy $P(B) > 0$.

1.8 Prawdopodobieństwo Całkowite

Aby wprowadzić pojęcie prawdopodobieństwa całkowitego posłużymy się następującym przykładem:

Przykład 1.13 *Przypuśćmy, że jakaś fabryka produjkująca żarówki ma wadliwość 5 żarówek na 100 wyprodukowanych. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa wynosi* 0.05*. Przypuśćmy teraz , że zainstalowano w tej fabryce nową linię produkcji, która produkuje tylko 1 żarówkę wadliwą na 100 wyprodukowanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa?*

Interesujące prawdopodobieństwo to tak zwane prawdopodobieństwo całkowite. Gdyby nowa linia produkcji produkowała tyle samo żarówek co stara linia produkcyjna, to prawdopodobieństwo całkowite powinno być równe średniej wadliwości, to znaczy $\frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$. Oczywistście zakładamy, że żarówki wyprodukowane przez obie linie produkcyjne zostały dokładnie wymieszane.. Odpowiedź na pytanie w tym przykładzie wynika z następującego twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ wyłaczają się parami i ich parwdopodobieństwa $P(B_i) > 0,\ i = 1, 2, ...n$. Ponadto, jeżeli alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ z przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, zachodzi następujący wzór:*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)$$

Stosując to twierdzenie do opisanego wyżej przykładu, załóżmy, że nowa linia produkcyjna produkuje trzy razy więcej żarówek niż stara linia produkcyjna. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie losowe, że wybrana żarówka jest wadliwa. Również oznaczmy przez B_1 i B_2 zdarzenia, że losowo wybrana żarówka została wyprodukowana na starej lini produkcyjnej i nowej lini produkcyjnej, odpowiednio. Stosując twierdzenie o całkowitym prawdopodobieństwie, sprawdzamy założenia tego twierdzenia. Po pierwsze, widzimy że zdarzenia B_1 i B_2 są rozłączne. Po drugie,żadne z tych zdarzeń nie jest zdarzeniem niemożliwym, czyli prawdopodobieństwa ich zajścia są dodatnie, $P(B_1) > 0$ i $P(B_2) > 0$. Następnie, alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 = \Omega$.
Z treści przykładu wynika, że

- $P(B_1) = 0.3$,
- $P(B_2) = 0.7$.

oraz, że dane prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

- $P(A/B_1) = 0.05$,
- $P(A/B_2) = 0.01$.

Z tezy twierdzenia wynika

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = 0.3 * 0.05 + 0.7 * 0.01 = 0.036$$

Zatem średnio 36 żarówek na 1000 żarówek wyprodukowanych w fabryce to są żarówki wadliwe.
Zauważmy, że jeżeli obie linie produkcyjne produkują tą samą ilość żarówek, wtedy prawdopodobieństwa B_1 i B_2 są równe

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

i prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = \frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$$

Rozpatrzmy inny przykład.

Przykład 1.14 *Powiedzmy, że stan pogody dla Warszawy w miesiącu kwietniu można schrakteryzować za pomocą jednego z trzech typów pogody I, II, III. Z długotrwałych obserwacji wywnioskowano, że prawdopodobieństwa tego, że w wybranym losowo dniu kwietnia będzie określony typ pogody są odpowiednio równe:* 0.2, 0.1, 0.7. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.*

Oznaczmy przez $B_1,\ B_2,\ B_3$ zdarzenia polegają na tym, że w losowo wybranym dniu kwietnia wystąpi odpowiednio I-szy lub II-gi, lub 3-ci typ pogody. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.
Teraz sprawdzamy założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym. Po pierwsze zauważamy, że zdarzenia $B_1,\ B_2,$ i B_3 są parami rozłączne. To znaczy koniukcja tych par zdarzeń jest zbiorem pustym $\emptyset$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Po drugie, prawdopodobieństwa zdarzeń $P(B_1) > 0,\ P(B_2) > 0,\ P(B_3) > 0$ są dodatnie. Po trzecie alternatywa zdarzeń

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

jest zdarzeniem pewnym.
Z treści tego przykładu mamy dla losowo wybranego dnia kwietnia prawdopodobieństwa pojawienia się typu pogody

- $P(B_1) = 0.2$
- $P(B_2) = 0.1$
- $P(B_3) = 0.7$

oraz prawdopodobieństwa warukowe

- $P(A/B_1) = 0.9$
- $P(A/B_2) = 0.8$
- $P(A/B_3) = 0.15$

Z tezy twerdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym obliczamy prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) \\ &= 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 + 0.7 * 0.15 = 0.445 \end{aligned}$$