

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby x

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

Błąd względny zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

Błąd procentowy zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

MATEMATYKA REPREZENTACJA LICZB W KOMPUTERZE

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

WARSZAWA 2018¹

¹Czwarty projekt

Contents

1	Reprezentacja liczb w komputerze.	5
1.1	Zapis liczb w zmiennym przecinku	5
1.2	Błąd bezwzględny zaokrąglenia.	6
1.3	Błąd względny zaokrąglenia.	6

Chapter 1

Reprezentacja liczb w komputerze.

Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r -tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r -tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r -ym miejscu kasujemy. Operacje zokrąglania liczby x na r -tym miejscu, oznaczmy symbolem $fl_r(x)$.

Przykład 1.1 Zaokrąglamy liczbę $\frac{22}{7}$ na 5-tym miejscu po przecinku jak następuje:

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857\dots; \quad fl_5(3.142857142857\dots) = 3.14286, \quad r = 5.$$

1.1 Zapis liczb w zmiennym przecinku

W obliczeniach z użyciem systemów obliczeniowych i komputerów liczby zapisywane są w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m 10^c, \quad m - \text{mantysa}, \quad c - \text{cecha},$$

gdzie mantysa $m = 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$; $\alpha_1 \neq 0$; $0 \leq \alpha_i \leq 9$; $i = 1, 2, \dots, r$ Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \neq 0$ jest zawsze różna od zera.

Dlatego mantysa m spełnia następującą nierówność

$$0.1 \leq m < 1.$$

Jasne, że liczba x może mieć dokładną zmiennoprecinkową reprezentację w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład $\frac{1}{4}$ ma dokładną reprezentację gdyż jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 0$.

Natomiast, mantysa liczby

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

ma nieskończenie wiele cyfr $m = 0.333\dots$, i nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.

Jednakże, każdą liczbę, nawet z nieskończoną mantysą, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zokrągleń mantysy na r -tym miejscu po przecinku

$$\epsilon \leq \underbrace{0.000\dots05}_{r\text{-zer}} = 0.5 \cdot 10^{-r}.$$

Na przykład

$$x = \frac{2}{3} = 0.666666666666\dots$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku ($r = 4$)

$$fl(x) = 0.6667$$

ma błąd zaokrągleń $\epsilon = 0.0000333\dots$

Zadanie 1.1 Zaokrąglaj następujące liczby na 3-cim miejscu po przecinku i zapisz je w zmiennym przecinku

$$2\frac{3}{4}, \frac{29}{7}, -\frac{238}{13}$$

Oszacuj błąd zaokrągleń.

1.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Bezwzględny błąd zaokrąglenia liczby

$$x = \mp m 10^c$$

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Ten błąd spełnia nierówność

$$|fl_r(x) - x| \leq \epsilon * 10^c,$$

gdzie $\epsilon = 0.5 * 10^{-r}$.

$$x = 0.57367864 * 10^2, \quad r = 3.$$

Wtedy błąd bezwzględny liczby x na trzecim miejscu po przecinku bezwzględny zaokrąglenia wynosi

$$\begin{aligned} & |fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2| = \\ & |0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2| = 0.032136 < \frac{1}{2} * 10^{-3} * 10^2 = 0.05. \end{aligned}$$

1.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Względny błąd zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:

$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x} \quad \text{gdy } x \neq 0.$$

Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność

$$\left| \frac{fl_r(x) - x}{x} \right| \leq 0.5 * 10^{1-r}, \quad x \neq 0.$$

Rzeczywiście,

$$\left| \frac{fl_r(x) - x}{x} \right| = \left| \frac{fl_r(\mp m 10^c) \pm m 10^c}{\mp m 10^c} \right| \leq \left| \frac{0.5 * 10^{-r}}{\mp m} \right| \leq 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Tak więc błąd względny nie przewyższa komputerowej precyzji $\delta = \frac{1}{2} * 10^{1-r}$.

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja $\delta = \frac{1}{2} * 10^{-2}$

Obliczamy względny błąd zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| = \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = 0.0005601742.$$

Błąd względny bezpośrednio związany jest z błędem procentowym. Mianowicie, błąd procentowy wyraża się wzorem

$$p\% = 100 * \delta_x\% = 100 \frac{fl(x) - x}{x} \% \quad \text{gdy } x \neq 0.$$

Obliczamy, błąd procentowy liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$p\% = 100 * 0.5601742 * 10^{-3}\% = 0.5601742 * 10^{-1}\% = 0.05601742\%.$$

Oczywiście, wyniki obliczeń w komputerze czterech arytmetycznych operacji $x \pm y$, xy i dzielenia x/y na ogół są niedokładne, nawet jeżeli x i y są dane w postaci dokładnej.

Na przykład, niech $x = 0.11111111$ i $y = 0.55555555$ będą 8-cyfrowymi liczbami w 8-mio cyfrowej arytmetyce w komputerze, (8-cyfr mantysa).

Zauważamy, że wynik mnożenia $xy = 0.617283938271605 * 10^{-1}$ ma 15-sto cyfrową mantysę $m = 0.617283938271605$, która automatycznie jest zaokrąglona w komputerze do 8 cyfrowej mantysy 0.61728394 z błędem bezwzględnym $\epsilon_x = 0.000000018271605$.

Przykład 1.2 Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zmiennopłetwy - przecinkowym

$$\frac{2\frac{1}{3} * 3\frac{1}{7} + 45.27}{4\frac{2}{9}}$$

Podaj: błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy obliczeń.

Rozwiązanie. Najpierw, napiszemy liczby $x = 2\frac{1}{3}$, $y = 3\frac{1}{7}$, $z = 45.27$, $t = 4\frac{2}{9}$ w postaci zmiennopłetwy, potem zaokrąglimy do miejsca $r = 3$ i podamy błąd zaokrąglenia każdej z danych liczb

$$\begin{aligned} x = 2\frac{1}{3} &= 2.33333\dots; & fl_3(x) &= 0.233 * 10, & \epsilon_x &= 0.003333\dots; \\ y = 3\frac{1}{7} &= 3.142857142857\dots; & fl_3(y) &= 0.314 * 10, & \epsilon_y &= 0.0042857\dots; \\ z &= 45.27 & fl_3(z) &= 0.453 * 10^2, & \epsilon_z &= 0.07 \\ t = 4\frac{2}{9} &= 4.222222\dots; & fl_3(t) &= 0.422 * 10, & \epsilon_t &= 0.00222\dots; \end{aligned}$$

Dalej, stosując reguły kolejności wykonywania operacji arytmetycznych, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie, obliczymy wartość wyrażenia w arytmetyce 3-cyfrowej:

$$\begin{aligned} \text{Iloczyn} &= fl_3(2\frac{1}{3}) * fl_3(3\frac{1}{7}) = fl_3(2.33 * 3.14) = fl_3(7.3162) = 7.32 \\ \text{Suma} &= fl_3(7.32 + fl_3(45.274)) = fl_3(7.32 + 45.3) = fl_3(52.62) = 52.6 \\ \text{Licznik} &= 52.6, \quad \text{Mianownik} = 4.22, \\ \frac{\text{Licznik}}{\text{Mianownik}} &= fl_3\left(\frac{52.6}{4.22}\right) = fl_3(12.4645) = 12.5, \end{aligned}$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego w 3 cyfrowej arytmetyce wynosi 12.5

Teraz obliczmy wartość tego wyrażenia w 5-cio cyfrowej arytmetyce.

Mamy następujące dane:

$$\begin{aligned} x = 2\frac{1}{3} = 2.33333\dots; & \quad fl_5(x) = 0.23333 * 10, \quad \epsilon_x = 0.00003333\dots; \\ y = 3fl_5\frac{1}{7} = 3.142857142857\dots; & \quad fl_5(y) = 0.31429 * 10, \quad \epsilon_y = 0.000042857\dots; \\ z = 45.27 & \quad fl_5(z) = 0.4527 * 10^2, \quad \epsilon_z = 0.0 \\ t = 4\frac{2}{9} = 4.222222\dots; & \quad fl_5(t) = 0.42222 * 10, \quad \epsilon_t = 0.0000222\dots; \end{aligned}$$

Podobnie, obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego w 5-cio cyfrowej arytmetyce

$$\begin{aligned} \text{Iloczyn} &= fl_5(2\frac{1}{3}) * fl_5(3\frac{1}{7}) = fl_5(2.3333 * 3.1429) = fl_3(7.333333) = 7.3333 \\ \text{Suma} &= fl_5(7.3333 + fl_5(45.27)) = fl_5(7.3333 + 45.27) = fl_5(52.6033) = 52.603 \\ \text{Licznik} &= 52.603, \quad \text{Mianownik} = 4.2222, \\ \frac{\text{Licznik}}{\text{Mianownik}} &= fl_5(\frac{52.603}{4.2222}) = fl_3(12.4587) = 12.459 \end{aligned}$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego wyżej w 5-cio cyfrowej arytmetyce wynosi 12.459

Błędy: Dokładna wartość wyrażenia: = 12.457

Błąd bezwzględny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $12.5 - 12.457 = 0.043$.

Błąd względny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.043}{12.457} = 0.00345$; 0.345%

Błąd bezwzględny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $12.459 - 12.457 = 0.002$.

Błąd względny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.002}{12.457} = 0.00016$; 0.016%.

Zadanie 1.2 Oblicz wartość następującego wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zienno - przecinkowym

$$\frac{7\frac{2}{3} * 9\frac{3}{7} + 125.97}{3\frac{7}{9}} + 256.75$$

Podaj błędy: bezwzględny, względny i procentowy obliczeń.