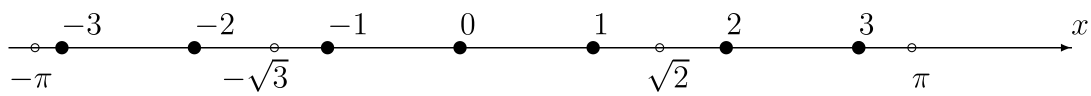
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

MATEMATYKA
W SZKOLE HELIANTUS
LICZBY WYMIERNE I RZECZYWISTE

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018[1]

[1] Projekt drugi

Contents

Chapter 1

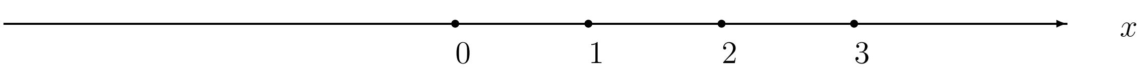
Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

1.1 Oś liczbowa

Zacznijmy od podsumowania wiedzy o liczbach naturalnych i liczbach całkowitych.
Niżej podajemy graficzny obraz tych zbioròw na osi liczbowej.
Zbiòr liczb naturalnych

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa, Liczby Naturalne

Przypominamy, że w zbiòr liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwòch liczb natualnych

$$n + m = s, \quad n, m \in N, \quad \text{to} \quad s \in N$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 + 5 = 8, \quad 3, 5 \in N, \quad 8 \in N$$

Podobnie iloczyn dwòch liczb naturalnych

$$n * m = s, \quad n, m \in N, \quad \text{to} \quad s \in N$$

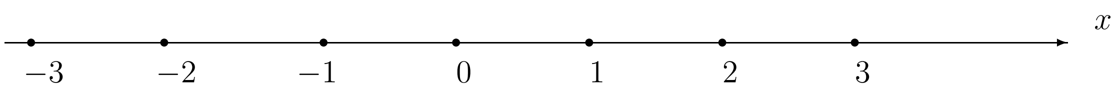
jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$3 * 5 = 15, \quad 3, 5 \in N, \quad 15 \in N$$

Dołanczając wszystkie liczby ujemne przeciwne do liczba naturalnych otrzymamy zbiór liczb całkowitych Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby całkowite

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb całkowitych

$$n + m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą naturalną
Na przyklad

$$-10 + (-5) = -10 - 5 = -15, \quad -10, -5 \in N, \quad -15 \in N$$

Podobnie różnica dwóch liczb całkowitych

$$n - m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7, \quad -12, -5 \in C, \quad -7 \in C$$

Również iloczyn dwóch liczb całkowitych

$$n * m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą
Na przyklad

$$-10 * (-5) = 50, \quad -10, -5 \in C, \quad 50 \in C$$

Natomiast, iloraz dwóch liczb całkowitych nie musi być liczbą całkowitą
Na przykład

$$\frac{3}{5}$$

jest ułamkiem, a nie jest liczbą całkowitą.
Niżej określamy liczby wymierne jako zbiór wszystkich możliwych ułamków.

1.2 Ułamki zwykłe

Licznik i mianownik ułamka zwykłego

$$\frac{\overbrace{5}^{licznik}}{\underbrace{8}_{mianownik}}$$

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}$$

W tych ułamkach liczniki są te same ròwne 1. Natomiast mianowniki tych ułamkòw są kolejnymi liczbami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Niżej podane ułamki mają ròżne liczniki i ròżne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{15}$$

1.2.1 Dodawanie ułamkòw

Dodawanie ułamkòw o tych samych mianownikach: dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.1 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Przykład 1.2 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Dodajemy ułamki o ròżnych mianownikach: należy znaleść wspòlny mienownik, może to byċ najmniesza wspòlna wielokrotna mianownikòw

Przykład 1.3 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{20}{6} + \frac{15}{60} + \frac{24}{60} = \frac{20+15+24}{60} = \frac{59}{60}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

1.2.2 Odejmowanie ułamków

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach: odejmujemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.4 *Odejmij ułamki*

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$
$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-2-1}{5}=\frac{1}{5}$$

Przykład 1.5 *Dodaj ułamki*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+2+4}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$$

Przykład 1.6 *Odejmij ułamki*

$$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7-1}{9}=\frac{6}{9}$$
$$\frac{13}{20}-\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{13-5+3}{20}=\frac{12}{20}$$
$$\frac{37}{50}-\frac{23}{50}=\frac{37-23}{50}=\frac{14}{50}$$

Odejmujemy ułamki o różnych mianownikach: należy znaleść wspólny mienownik, może to byċ najmniesza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 1.7 *Odejmij ułamki*

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5-3*1}{9}=\frac{2}{9}$$
$$\frac{33}{25}-\frac{21}{50}=\frac{2*33-21}{50}=\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$$
$$\frac{14}{15}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{14-3*2+5*2}{15}=\frac{14-6+10}{15}=\frac{18}{15}$$
$$\frac{253}{500}-\frac{126}{1000}=\frac{2*253-126}{1000}=\frac{506-126}{1000}=\frac{380}{1000}$$

1.2.3 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0, \ \ t \neq 0$$

Przykład 1.8 *Pomnóż ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273}$$

1.2.4 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0, \ \ p, t \neq 0$$

Przykład 1.9 *Podziel ułamki*

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 * 5}{4 * 3} = \frac{10}{12}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273}$$

1.3 Zbiór liczb wymiernych

Dołanczając do zbioru liczb całkowitych wszystkie ułamki otrzymamy zbiór liczb wymiernych. Ułamki

$$... - \frac{17}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, , \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, ...$$

nie są liczbami całkowitymi. Ogólnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiór wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiórem wszystkich możliwych ułamków tworzą zbiór liczb wymiernych. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą W.

$$W = \{\frac{p}{q}: \text{ dla calkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0\}$$

Inaczej, piszemy

$$W = \{\frac{p}{q}: \text{ dla kazdego } p, q \in C, \quad q \neq 0.\}$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \ \ w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 * 4 + 3 * 3}{12} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} =\in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \ w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1 * 3 - 2 * 3}{6} = \frac{3 - 6}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną
Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2 * 3}{3 * 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} =\in W$$

jest liczbą wymierną
Również, dla liczb

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \ w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

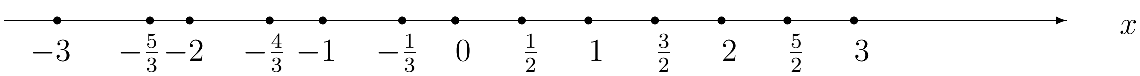
iloraz

$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną
Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy

dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na prrzykład ich średnia arytmetyczna $\dfrac{w_1 + w_2}{2} \in W$.
Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmnieszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, złóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W, $(x \notin W)$. Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\dfrac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W.

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby wymierne

1.3.1 Wyrażenia arytmetyczne

Przypominamy, że wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb, w tym liczb wymiernych, połączonych operacjami arytmetycznymi dodawiania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Kolejność wykonywanych operacji najpierw mnożenie, potem w kolejności dzielenie,dodawanie i odejmowanie w wyrażeniach bez nawiasów. W wyrażeniach z nawiasami, w pierwszej kolejności obliczamy waartśći w nawiasach.
Przykłady wyrażeń arytmetycznych bez nawiasów

Przykład 1.10 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}$$

Przykład 1.11 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Przykład 1.12 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Przykłady wyrażeń arytmetycznych z nawiasami

Przykład 1.13 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

Przykład 1.14 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

Przykład 1.15 *Oblicz watość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5})}{(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3})}$$

1.3.2 Wyrażenia algebraiczne

Oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej warości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 1.16 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $a = 2$

$$\frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{3} + \frac{a}{4}}$$

Przykład 1.17 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla wartści* $b = 1$

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}}$$

Przykład 1.18 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla wartości* $c = 3$

$$\frac{\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{3} * \frac{3}{c}}{\frac{c}{3} * \frac{1}{c} + \frac{3}{c} * \frac{c}{3}}$$

Przykłady wyrażeń algebraicznych z nawiasami

Przykład 1.19 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla* $a = 2$

$$\frac{(\frac{a}{3} - \frac{a}{2})(\frac{2}{3} - \frac{a}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{a}{4})(\frac{4}{a} + \frac{a}{4})}$$

Przykład 1.20 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla* $b = 3$

$$\frac{(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b})(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5})}{(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3})(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3})}$$

Przykład 1.21 *Oblicz watość wyrażenia algebraicznego dla* $c = 1$

$$\frac{(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5})}{(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3})}$$

1.3.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraicznym

$$a * x + b$$

jest liniowe ze względu na zmienną x, gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$\begin{aligned}
2 * x + 1, \qquad & a = 2, \qquad b = 1 \\
-5 * x + 4, \qquad & a = -5, \qquad b = 4 \\
\frac{2}{3} * x + \frac{3}{5} \qquad & a = \frac{2}{3}, \qquad b = \frac{3}{5} \\
-\frac{13}{15} * x - \frac{25}{71}, \qquad & a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{25}{71} \\
35 * x - 57, \qquad & a = 35, \quad b = -57
\end{aligned}$$

Przykład 1.22 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad a = 5, \qquad b = -25 \\
&(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \qquad b = \frac{2}{9} \\
&(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}
\end{aligned}$$

1.3.4 Równanie liniowe

Równanie liniowe

$$a * x + b = 0$$

lub każde równanie, które można sprowadzić do tej postaci jest liniowe ze względu na niewiadomą x. Liczby a i b nazywamy współczynnikami równania liniowego.
Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, która podstawiona w mniesce x, spełnia to równanie.
Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:
• przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
• niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie
• dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x.

Przykłady równań liniowych.

$$
\begin{array}{lllll}
2*x-4=0, & x=2, & 2*2-4=0, & a=2, & b=-4\\
-3*x+3=0, & x=1, & -3*1+3=0, & a=-3, & b=3\\
\frac{3}{2}*x+\frac{3}{5}=0, & x=-\frac{2}{5}, & \frac{3}{2}*(-\frac{2}{5})+\frac{3}{5}=0, & a=\frac{2}{3}, & b=\frac{3}{5}
\end{array}
$$

Przykład 1.23 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x-1=0, \quad a=2,, \quad b=-1.$$

Rozwiązanie.
Przenosimy liczbę -1 *na prawą strone, zmieniają znak na przeciwny*

$$2x=1 \mid :2$$

Dzielimy przez współczynnik $a=2$*, żeby otrzyma* x
W ten sposób znajleżliśmy rozwiązanie

$$x=\frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x=\frac{1}{2}$*, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie.*
Mianowicie dla $x=\frac{1}{2}$*, mamy*

$$2x-1=2\frac{1}{2}-1=1-1=0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x=\frac{1}{2}$ *spełnia to równanie.*

Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

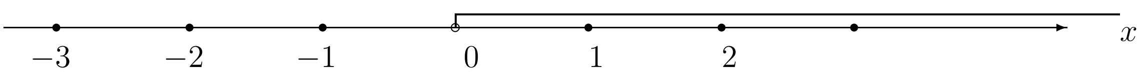
$$a\,x+b=0, \quad a\neq 0, \quad a\,x=-b, \quad x=-\frac{b}{a},$$

Zadanie 1.1 *Rozwiąż równanie*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & 3\,x-12=0\\
(ii) & 5\,x+20=10\\
(iii) & \frac{3}{4}x+\frac{5}{8}=1
\end{array}
$$

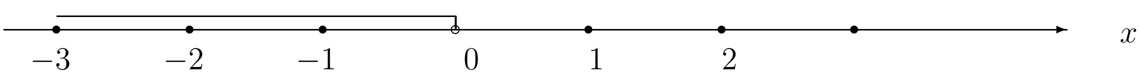
1.3.5 Nierówności

Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x które sąwiększe od zera, nierówność $x > 0$ ostra, zero nie jest włączona.



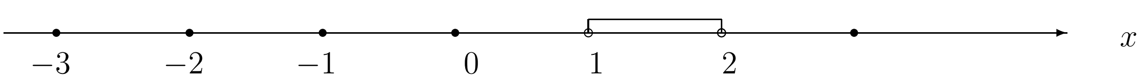
Nierównść ostra wartości $x > 0$

Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, które są mniejsze od zera, nierówność $x < 0$ ostra, zero nie jest włączona.



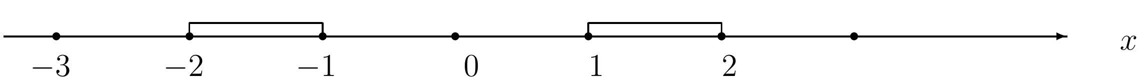
Nierównść ostra wartości $x < 0$

Zaznacz na osi liczbowej te wrtości x, dla które lelżą
pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $1 < x < 2$ nierówność $1 < x < 2$ ostra, 1 i 2 nie są włączone.



Nierównść ostra wartości $1 < x < 2$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x, które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$, nierówności słabe z włączeniem liczb $-2, -1, 1, 2$



Nierównść słaba $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

Zadanie 1.2 *Rozwiąż nierówności*

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

Przykład 1.24 *Rozwiąż nierówności*

$$3(x-1) < 2(x+1)$$

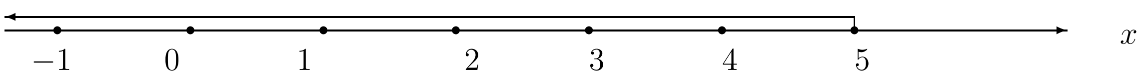
Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.
Rozwiązanie
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \qquad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie $x < 5$ nierówności.



Nierównść ostra wartości $x < 5$

Zadanie 1.3 *Rozwiąż nierówności*

$$(i) \quad 3(3x-1) - 2(2x+1) < 4(x-1)$$

$$(ii) \quad 3(x-2) + 4(x+2) \leq 2x + 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

1.4 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwykłe o mianownikach 10,100, 1000 na zywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{3}{10} & = & 0,3, & \frac{5}{100}, & = & 0,05, \\ \frac{35}{1000} & = & 0,035 & \frac{735}{1000} & = & 0,735, \\ 2\frac{3}{10} & = & 2,3, & 10\frac{12}{100} & = & 10,12. \end{array}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe

$$
\begin{aligned}
0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100},\\
0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10},\\
0.05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000},\\
0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10},\\
10,12 &= 10\frac{12}{100}.
\end{aligned}
$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zamienič na ułamek dziesiętny.
Pierwszy prosty sposòb zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mienowniku, $10, 100, 1000, ...$ Ten sposòb jest prosty tylko dla wybranych ułamkòw.

Przykład 1.25

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} = \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.1\\
&\frac{3}{4} = \frac{3*25}{4*25} = \frac{75}{100} = 0.25\\
&\frac{7}{5} = \frac{7*20}{5*20} = \frac{140}{100} = 1.4\\
&\frac{15}{250} = \frac{15*4}{250*4} = \frac{60}{1000} = 0.06
\end{aligned}
$$

Drugi sposòb zamiany ułamkòw zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 1.26 *Zajmień ułamek* $\frac{1}{4}$ *na ułamek dziesiętny.*
Rozwiązanie. *Dzielimy 1=1,00 przez 4. Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1*

$$\begin{array}{rl} & 0,25 \\ & -- \\ & 1,00 \quad :4 \\ - & 0 \\ & -- \\ & 10 \\ & -8 \\ & -- \\ & \ \ 20 \\ & -\ \ 2 \\ & -- \\ & \ \ \ 0 \end{array}$$

Odpowiedz: $\frac{1}{4} = 0,25$

Zadanie 1.4 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$\begin{array}{ll} (i) & \frac{3}{5} \\ (ii) & \frac{37}{50} \\ (iii) & \frac{253}{250} \end{array}$$

Zadanie 1.5 *Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny*

$$\begin{array}{ll} (i) & \frac{2}{15} \\ (ii) & \frac{23}{45} \\ (iii) & \frac{37}{150} \end{array}$$

1.4.1 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamk $\frac{p}{100}$ o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$.

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% \; * \; a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a.

Przykład 1.27 *Oblicz* 15% *z wartości a=60*

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Przykład 1.28 *Oblicz* 25% *z wartości a=3000*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartość a

Przykład 1.29 30% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartość a*

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 1.6 *Oblicz* 75% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 1.7 *Oblicz* 15% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a, oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 1.8 50% *procent wartości a równa się* 800. *Oblicz wartość a*

Zadanie 1.9 30% *procent wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartość a*

Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.
$p\%\%$ promili to ułamk $\frac{p}{1000}$ o mianowniku 1000.

Na przykład

1%% jeden procent to ułamek $\dfrac{1}{1000} = 0.001$ o mianowniku 1000.

25%% to ułamek $\dfrac{25}{1000} = 0.025$ o mianowniku 1000.

1000% to całość $\dfrac{1000}{1000} = 1$.

Obliczamy $p\%\%$ procent z wartości a

$$p\% \ * \ a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a.

Przykład 1.30 *Oblicz* 15%% *z wartości a=3000*

$$15\%\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Przykład 1.31 *Oblicz* 25%% *z wartości a=3000*

$$25\%\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ procent wartości a, obliczamy wartośċ a

Przykład 1.32 30%% *procent wartości a równa się* 600. *Oblicz wartośċ a*

Rozwiązanie.

$$30\%\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 1.10 *Oblicz* 75%% *z wartości* $a = 2000$

Zadanie 1.11 *Oblicz* 15%% *z wartości* $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\%\% * a$ promili wartości a, oblicz wartośċ a podaną niżej w ċwiczeniach

Zadanie 1.12 50%% *promili wartości a równa się* 800. *Oblicz wartośċ a*

Zadanie 1.13 30%% *promili wartości a równa się* 5000. *Oblicz wartośċ a*

1.4.2 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - stopa procentowa w skali roku
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczządzania kapitałK_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})$$

Po drugim roku oszczędności kapitałK_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1\frac{p}{100} = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n - 1$ latach oszczędzania kapitał wrośnie o $p\%$

$$K_{n-1} = K_0(1 + \frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach oszczędznia

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n$$

Przykład 1.1 *Oblicz o ile wzrośnie kapitał* $150000PLN$ *po 10 latach, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$*.*

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1 + \frac{5}{100})^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334PLN$$

Odpowiedź: Kapitał $150000PLN$ wzrośnie przez 10 lat o $94334PLN$, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi $p = 5\%$.

Spłata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.
Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0\frac{p}{100} = K_0(1 - \frac{p}{100})$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1\frac{p}{100} = K_1(1 - \frac{p}{100}) = K_0(1 - \frac{p}{100})^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n-1$ latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0(1-\frac{p}{100})^{n-1}$$

to po n latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0(1-\frac{p}{100})^n$$

Przykład 1.2 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $150000 PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

Rozwiaązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000(1-\frac{5}{100})^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810 PLN$$

$$K_{150} = 150000(1-\frac{5}{100})^{150} = 150000 * 0.95^{150} = 150000 * 0.0004555 = 68.33 PLN$$

Odpowiedź: Po 10 latach kredyt zmaleje o $69189.5 PLN$. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o $149931.67 PLN$.

Zadanie 1.14 *Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału* $200000 PLN$ *po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłaconia, jeżeli stopa prcentowa* $p = 5\%$.

1.5 Liczby rzeczywiste

Dotyczhczas poznaliśmy natępujące zbiory liczb:
Nieskończony zbiór liczb naturalnych, nieskończony ponieważ liczb naturalnych jest tak dużo ile chcemy.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$$

Nieskończony zbiór liczb całkowitych

$$C = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

Ktoś by pomyślał , że liczb całkowitych jest dwa razy więcej niż liczb naturalnych. Otóż nie, liczb całkowitych jest tyle samo co liczb naturalnych, to jest ta sama nieskończonośc.
Nieskończony zbiór liczb wymiernych, czyli zbiór wszystkich możliwych ułamków

$$W = \{\frac{p}{q}: \quad p, q \in C, \quad q \neq 0\}$$

Liczb wymiernych jest rȯwnież tyle samo co liczb naturalnych, to jest ta sama nieskończoność.

Pierwiastek kwadratowy.
Pierwiastkiem kwadratowym z liczby wymiernej nieujemej $a \geq 0$, nazywamy liczbę $b \geq 0$ też nie ujemną, taką, że

$$b^2 = a$$

Wtedy piszemy

$$\sqrt{a} = b$$

Na przykład

$$\text{dla } a = 4, \quad b = 2, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \text{bo} \quad 2^2 = 4,$$

$$\text{dla } a = 9, \quad b = 3, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \text{bo} \quad 3^2 = 9,$$

$$\text{dla } a = \frac{4}{9}, \quad b = \frac{2}{3} \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \quad \text{bo} \quad (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}.$$

Ziȯr liczb rzeczywistych zawiera wszytkie liczby wymierne i jest istotnie większy od wszystkich zbiorȯw liczbowych, to znaczy, że liczb rzeczywistych jest więcej niż nieskończoność. [1]
Poznajmy, liczby rzeczywiste, ktȯre nie są liczbami naturalnymi, ani liczbami całkowitymi, ani liczbami wymiernymi. Taką liczbą rzeczywistą jest pierwiastek kwadratowy z liczby 2.
Rzeczywiście, jeżeli liczba $\sqrt{2}$ byłaby wymierna, to istniałyby liczby całkowite $p \in C$ i $q \in C$ takie że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0.$$

gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to znaczy liczby p i q nie mają wspȯnego dzielnika. Zatem, mamy

$$(\sqrt{2})^2 = (\frac{p}{q})^2, \quad 2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad 2 * q^2 = p^2$$

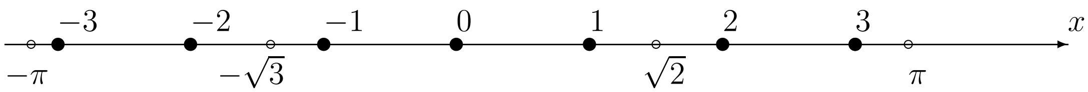
Z rȯwności $2 * q^2 = p^2$ wynika, że liczba p^2 jest podzielna przez 2. To znaczy, że liczba p też jest podzielna przez 2. Wtedy $p = 2 * k$ dla pewnego całkowitego $k \in C$.
Zatem, mamy

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad q^2 = 2\ k^2$$

Teraz $q^2 = 2\ k^2$ jest liczbą parzystą i podzielną przez 2. To znaczy, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest skracalny. To przeczy istnieniu liczb całkowitych p, q. Dlatego liczba

[1] Dowȯd tego twierdzenia poznacie studiując teorie liczb.

$\sqrt{2}$ jest niewymierna, natomiast jest liczbą rzeczywistą.
Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamu literą R. Zbiór liczb rzeczywistych jest rozszerzeniem zbioru liczb wymiernych o liczby, niewymierne takie jak π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...; Zatem zachodzi następująca relacja: $W \subset R$. W istocie, liczb rzeczywistych niewymiernych jest "dużo"[2] wiecej niż liczb wymiernych. Zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Liczby rzeczywiste podaobnie jak liczby naturalne, całkowite i wymierne interpretujemy jako punkty na osi liczbowej. Dokładniej, liczba x oznacza odległość punktu x na od punktu oznaczonego przez zero.



Oś liczbowa. Liczby rzeczywiste

1.5.1 Wartość bezwzglęna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od początku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

Definition 1.1 *Wartość bezwzględną liczby x określamy jak następuje:*

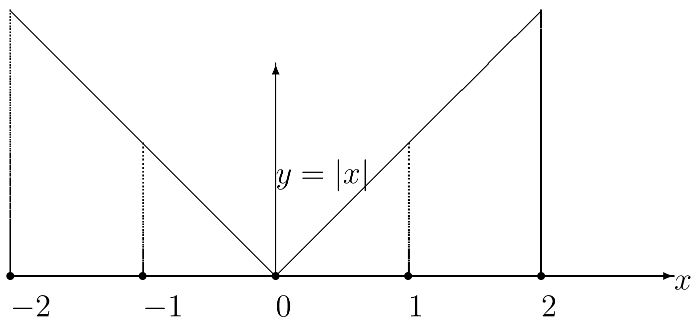
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$$

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$.
Również wartość bezwzględną liczby x jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy -2.

[2]Doód, Teoria Liczb, W. Sierpiński



Wykres wartości bezwzlędnej $y = |x|$

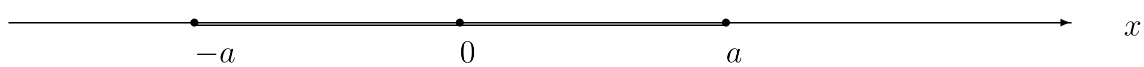
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzglęnej liczby x, wynika nierówność

$$|x| \le a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \le x \le a, \quad a \ge 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \le a, \quad \text{gdy} \quad x \le a \quad \text{i} \quad -x \le a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \le x \le a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x, które spełniają $-a \le x \le a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \le a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b, to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : \; a \le x \le b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b, równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 1.3 *Rozwiąż równanie*

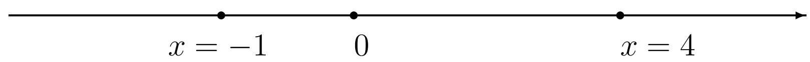
$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z defincji wartości bezwzględnej

$$|2x-3| = \begin{cases} \quad 2x - 3 = 5, \quad gdy \quad 2x - 3 \ge 0, \quad to \quad x = 4, \\ -(2x-3) = 5 \quad gdy \quad -2x + 3 \le 0, \quad to \quad x = -1, \end{cases}$$

Rozwiązanie x=-1 lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.



Rozwiązanie $x=-1$ lub $x=4$.

Przykład 1.4 *Rozwiąż nierównść*

$$|x-3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej nierówność

$$|x-3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x-3 \leq 2, \quad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 1.5 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x-1| + |x+1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzlęnej znajdujemy

1. *dla* $x-1 \leq 0$, $\quad |x-1| = -(x-1) = 1-x, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = 1-x-1-x = -2x \leq 1,$$

gdy $x \geq -\dfrac{1}{2}$,

2. *dla* $-1 \leq x \leq 1$, $\quad |x-1| = (x-1) = x-1, \quad |x+1| = -(x+1) = -1-x$

$$|x-1| + |x+1| = x-1-1-x = -2 \leq 1,$$

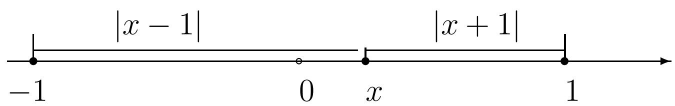
gdy $-1 \leq x \leq 1$

3. *dla* $x+1 \geq 0$, $\quad |x-1| = x-1, \quad |x+1| = x+1$

$$|x-1| + |x+1| = (x-1) + (x+1) = 2x \leq 1,$$

gdy $x \leq \dfrac{1}{2}$,

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.
Również zauważmy, że odległość punktu $x \in [-1,1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu $x \in [-1,1]$ od 1 równa się 1. Zatem nierówność jest spełniona również dla $x=-1$ lub $x=1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



Rownanie $|x-1|+|x+1|=1$.

Zadanie 1.15 *Rozwiąż równanie*

$$|3x-5|=4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.16 *Rozwiąż równanie*

$$|2x-3|=5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.17 *Rozwiąż nierówność*

$$|x-5|\le 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.18 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x|+|x-2|\le 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

1.5.2 Wyrażenia algebraiczne w zbiorze liczb rzeczywistych

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne w zbiorze liczb rzeczywistych budowane są na tych samych zasadach jak w liczbach wymiernych. Mianowicie, przypomijmy określenie wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego

Definition 1.2 *Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy liczby połączone operacjami arytmetycznymi* $+,-,*,/$, *potęgowaniem o wykładnikach wymiernych i nawiasami wyznaczającymi kolejność wykonywania tych działań.*

W poprzednim paragrafie podaliśmy przykłady obliczeń wyrażeń arytmetycznych. Niżej podajemy kilka wyrażeń arytmetycznych w liczbach rzeczywistych

$$5*3+4*8-15,\quad \frac{2}{3}+2^{\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{1}{3}+\sqrt[3]{5}}{1+\sqrt{2^3}},\quad \frac{3^3*3^5+(\frac{1}{3})^{-4}*27^3}{9[3^2+(\frac{1}{3})^{-4}*3^3]}$$

Definicja wyrażeń algebraicznych różni się od definicji wyrażeć arytmetycznych tym że wyrażenia te zawierają też zmienne oznaczone literami.

Definition 1.3 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy liczby lub litery połączone operacjami arytmetycznymi* $+, -, *, /$*, potęgowaniem o wykładnikach wymiernych i nawiasami wyznaczającymi kolejność wykonywania tych działań.*

W poprzednim paragrafie podaliśmy przykłady obliczeń wyrażeń arytmetycznych. Niżej dla przykładu napiszmy kilka wyrażeń arytmetycznych

$$5a * 3b + 4 * 8c - 15x, \quad \frac{2a}{3} + 2^{\frac{2}{3}} b * c, \quad \frac{\frac{1}{3}a * b + c\sqrt[3]{5}}{2x + y\sqrt{2^3}}, \quad \frac{3^3 * 3^5 a * b + (\frac{1}{3})^{-4} * 27^3}{9[3^2 + (\frac{1}{3})^{-4} * 3^3 x * y * z]}$$

Jeżeli w wyrażeniach algebraicznych podstawimy liczby za zmienne, wtedy otrzymujemy wyrażenie arytmetyczne. W powyższych przykładach, jeżeli za zmienne podstawimy wartości $a = 1, \underline{=}1,\ c = 1,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ to otrzymamy wyrażenia arytmetyczne.

Przykład 1.6 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \qquad a > 1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1) &= \frac{(a^2 - a) - (a - 1)(a + 1)}{a - 1} \\
&= \frac{(a^2 - a) - [a(a + 1) - 1(a + 1)]}{a - 1} \\
&= \frac{a^2 - a - [a^2 + a - a - 1]}{a - 1} \\
&= \frac{a^2 - a - a^2 + 1]}{a - 1} \\
&= \frac{1 - a}{a - 1} = -\frac{1 - a}{1 - a} = -1.
\end{aligned}$$

W następnym pragrafie podajemy wzory uproszczonego mnożenia, które są wyrażeniami algebraicznymi szczegónej postaci.

1.5.3 Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2r,\ a_0 + 3r, ..., a_0 + n\,r; \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem arytmetcznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $r \in R$ jest różnicą ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n\,r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a + (n+1)r - (a + n\,r) = r, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przyład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, ...;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.
Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.
Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$, may

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 1.7 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu jest stała $r = \dfrac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, ...;$
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależy od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1 + n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n+1$ dla $n = 0, 1, 2, ...$; zależy od n.

Zadanie 1.19 *Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny*

$$\begin{aligned} &(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \qquad n = 0, 1, 2, ...; \\ &(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, ..., : \end{aligned}$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji zapisujemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \cdots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n \;=\; (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 1.8 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.
Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 1.20 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ..., ;$$

1.5.4 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2,\ a_0q^3, ..., a_0q^n \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.
Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego zapisujemy wzorem

$$a_n = a_0q^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy $a_0 \neq 0,\ q \neq 0$.
Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3 ...; 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauwamy, e gdy iloraz $q = 0$ to cig geometryczny jest o wyrazie oglnym staym $a_n = a_0$ dla kadego $n1, 2, ...;$
Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a\ q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równa dla każdego $k = 0, 1, 2, ...n$;
Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, ..., n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)} = a_0 * a_n.$$

Przykład 1.9 *Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad a_n = n^2, \qquad n = 1, 2, ..., :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}) : (\frac{3^n}{2^n}) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jets stały i nie zależy od n, $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, ...;$
Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, ...;$ zależy od n.

Zadanie 1.21 *Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.*

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, ... \qquad n = 0, 1, 2, ...;$$
$$(ii) \quad \sqrt{n}, ... \qquad n = 1, 2, ...;$$

Zadanie 1.22 *Podaj pierwszy wyraz, n-ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego*

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3^2}{5}, \frac{3^3}{5}.$$
$$(ii) \quad \sqrt{2},\ 2, 2\sqrt{2}, 4,\ 4\sqrt{2}.... :$$