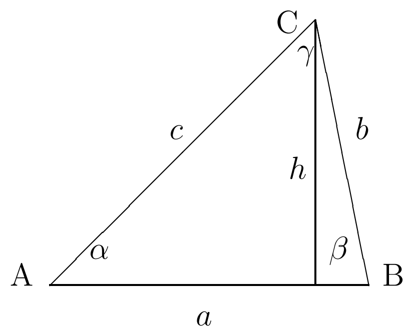
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Trójkąt ABC o bokach a, b, c i kątach α, β, γ oraz wysokości h.

GEOMETRIA PŁASKA. PLANIMETRIA

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018

Contents

Contents

Chapter 1

Geometria

Geometria Euklidesowa, kt`ora obejmje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonnego matematyki wchodzą tylko niekt`ore tematy wsparte ćwiczeniami, kt`ore są opisane w paragrafie &1, &2, &3.

1.1 Geometria płaska

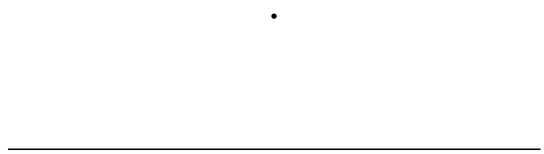
Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w tr`ojkątach, prostokątach, r`ownoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

1.1.1 Proste prostopadłe i prosterównoległe

Opis położenia prostych na płaszczyźnie zacznijmy od instrukcji konstrukcji prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzacej przez dany punkt. *Stawiamy nóżkę cyrkla w danym punktcje i zakreślamy łuki przecinające daną prostą. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w pierwszym punkcie przeciecia i zakreślamy okrąg, podobnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie przecięcia i zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkty przecięcia okręgów linijką. Widzimy, że w ten spób narysowaliśmy prostą prostopadłą do danej prostej i przechodzącą przez dany punkt.*

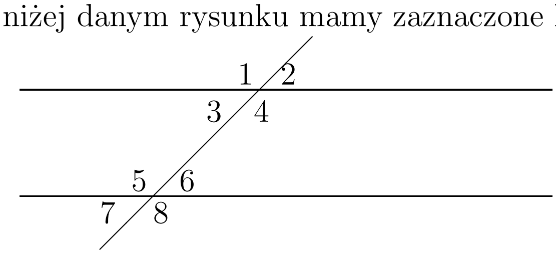
Zadanie 1.1 *Narysuj prostą prostopadłą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt, według powyżeszego opisu.*

Zadanie 1.2 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącej przez dany ponkt*



Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt oparta jest na rysowaniu równoległoboku.
Opis konstrukcji: stwiamy nóżkę cyrkla w danym punkcje i zakreślamy okrąg, który przecina daną prostą w dwóch punktach. Łączymy pierwszy punkt przecięcia z danym punktem linijką. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie i tym samym promieniem zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z danym punktem liniką. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy prostą równoległą.

Na niżej danym rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe:



Dwie linie proste równoległe

- kąty wierzchołkowe

$$\lhd 1 = \lhd 4, \quad \lhd 2 = \lhd 3, \quad \lhd 5 = \lhd 8, \quad \lhd 6 = \lhd 7$$

- kąty odpowiadające

$$\lhd 1 = \lhd 5, \quad \lhd 3 = \lhd 7, \quad \lhd 2 = \lhd 6, \quad \lhd 4 = \lhd 8$$

  - kąty naprzemianległe wewnętrzne

$$\lhd 3 = \lhd 6, \quad \lhd 4 = \lhd 5,$$

  - kąty naprzemianległe zewnętrzne

$$\lhd 1 = \lhd 8, \quad \lhd 2 = \lhd 7,$$

  - kąty przyległe

$$\lhd 1\ i\ \lhd\ 2, \quad \lhd 3\ i\ \lhd\ 4, \quad \lhd 1\ i\ \lhd\ 3, \quad \lhd 2\ i\ \lhd\ 4$$

$$\lhd 5\ i\ \lhd\ 6, \quad \lhd 7\ i\ \lhd\ 8, \quad \lhd 5\ i\ \lhd\ 7, \quad \lhd 6\ i\ \lhd\ 8$$

Zadanie 1.3 *Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest* 30^0.

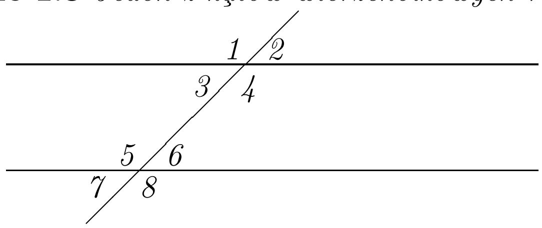


Fig. 4. Dwie linie proste równoległe

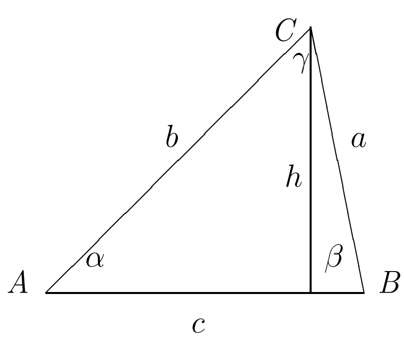
Oblicz wszystkie kąty
(a) wierchołkowe
(b) naprzemian ległe
(c) odpowiadające
(d) przyległe
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

1.1.2 Trójkąty

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych: Na płaszczyźnie wybieram trzy różne punkty A, B i C i łączymy te punkty używając linjki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki AB i AC przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków AB i AC, odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójką który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok BC jest równoległy odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpwiadające.

Przykład 1.1 *Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta*

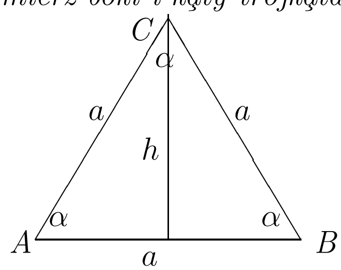


Trójkąt ΔABC

Pole trójkąta $= \dfrac{a*h}{2}$, *obwód trójkąta* $=a+b+c$

Trókąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzmy, że w ten spoób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.

Przykład 1.2 *Zmierz boki i kąty trójkąta na rysunku*



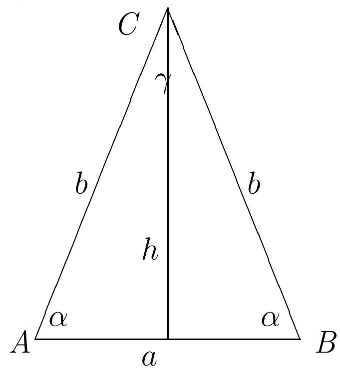
Trójkąt równoboczny ΔABC

Pole trójkąta $= \dfrac{a*h}{2}$, *obwód trójkąta* $=a+a+a=3*a$

Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

Trójkąt równoramienny Δ ABC ma dwa boki boki równe i dwa kąty przy podstawie też równe.
Konstrukcja trójkąta równoramiennego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości jako podstawe trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym bokowi trójkąta. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzmy, że w ten spoób powstał trójkąt o róworamienny.
Pole trójkąta $= \dfrac{a*h}{2}$, obwód trójkąta $=a+2*b$

Przykład 1.3 *Narysuj trójkąt równoramienny o bokach trójkąta na rysunku* *używając linijki i cyrkla.*



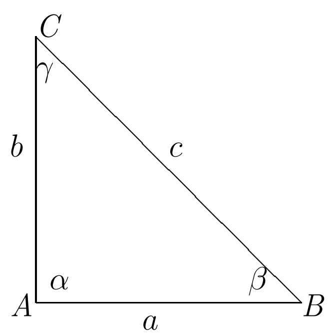
Zmierz boki i kąty tego trójkąta. Oblicz obwód i pole trójkąta, oblicz sumę kątów tego trójkąta

Trójkąt prostokątny

Pole trójkąta $= \dfrac{a * b}{2}$, obwód trójkąta $= a + b + c$

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne AB i AC, o długości a i b, przeciwprostokątną BC, o długości c, kąt prosty $\alpha = 90^0$ i dwa kąty przyległe β, γ

Zadanie 1.4 *Zmierz boki i kąty tego trójkąta.*



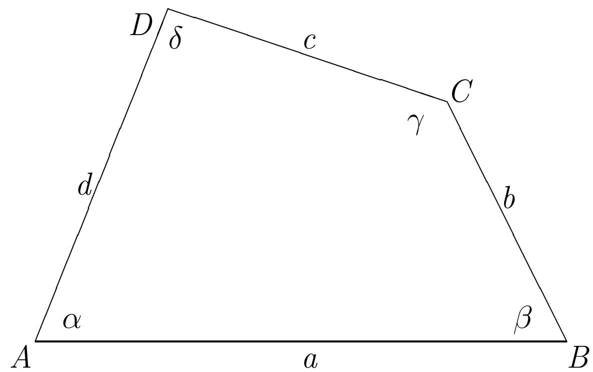
Trójkąt prostokątny ΔABC

Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

1.1.3 Czworokąty

Cworokąt $ABCD$ o wierzchołkach A, B, C, D ma cztery boki o długości a, b, c, d, cztery kąty α, β, γ, δ.

Zadanie 1.5 *Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta.*



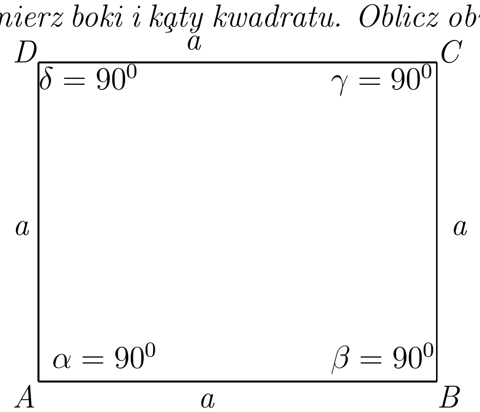
Czworokąt $ABCD$

$$\begin{aligned} a &= \qquad, b = \qquad, c = \qquad, d = \\ Obwod &= \\ \alpha &= \qquad, \beta = \qquad, \gamma = \qquad, \delta = \\ Suma &= \alpha + \beta \quad \delta + \gamma = \end{aligned}$$

Kwadrat $ABCD$ ma cztery boki równe a, cztery kąty proste równe 90^0.

Pole kwadratu = $a * a$, obwód kwadratu =$4 * a$

Zadanie 1.6 *Zmierz boki i kąty kwadratu. Oblicz obwód i sumę kątów kwadratu.*

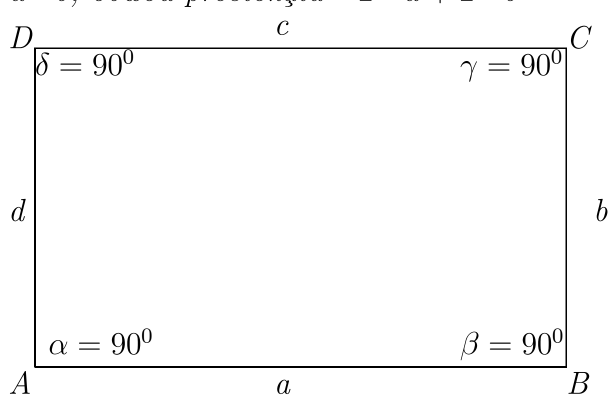


Kwadrat $ABCD$

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & \qquad , b \ = \qquad , c \ = \qquad , d \ = \\
Obwod & = & \\
Pole & = & \\
\alpha & = & \qquad , \beta \ = \qquad , \gamma \ = \qquad , \delta \ = \\
Suma & = & \alpha + \beta + \delta + \gamma \ =
\end{array}
$$

Zadanie 1.7 Prostokąt *ABCD ma cztery boki parami równe* $a = c,\ b = d$ *cztery kąty proste równe* 90^0.

Pole prostokąta $= a * b$, *obwód prostokąta* $= 2 * a + 2 * b$



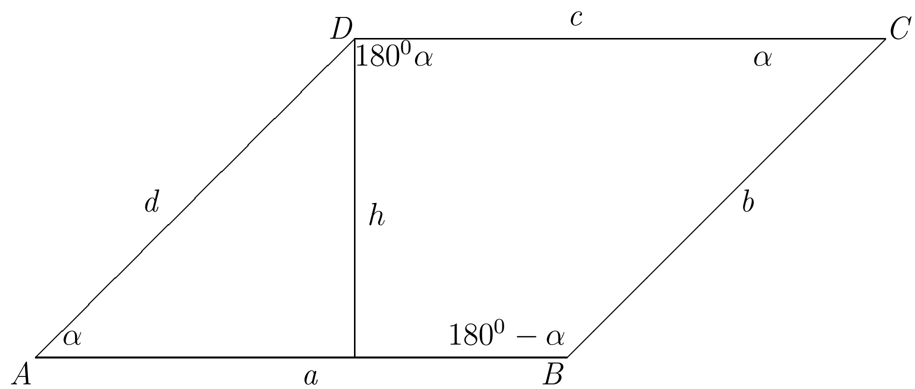
Prostokąt ABCD

Zmierz boki i kąty prostokąta. Oblicz obwód, pole i sumę kątów prostokąta.

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & \qquad , b \ = \qquad , c \ = \qquad , d \ = \\
Obwod & = & \\
Pole & = & \\
\alpha & = & \qquad , \beta \ = \qquad , \gamma \ = \qquad , \delta \ = \\
Suma & = & \alpha + \beta + \delta + \gamma \ =
\end{array}
$$

Zadanie 1.8 Równoległobok *ABCD ma cztery boki parami równe* $a = c,\ b = d$ *cztery kąty parami równe i wysokść* h.

Pole równoległoboku $= a * h$*, obwód równoległoboku* $=2 * a + 2 * b$



Równoległobok ABCD

Zmierz boki i kąty równoległoboku. Oblicz obwód, pole i sumę kątów r ownpległoboku.

$$a \;=\; \qquad , b \;=\; \qquad , c \;=\; \qquad , d \;=$$

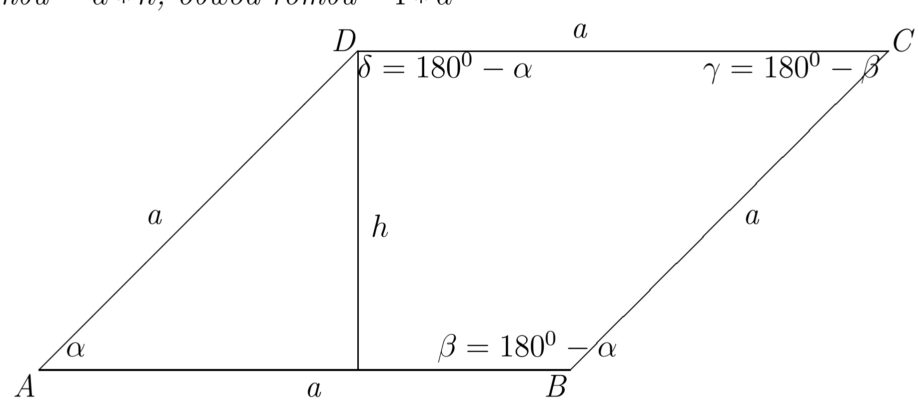
$$Obwod \;=$$

$$Pole \;=$$

$$Suma \;=\; \alpha \;+\; \beta \;+\; \delta \;+\; \gamma \;=$$

Zadanie 1.9 Romb *ABCD ma cztery boki równe a cztery kąty parami równe i wysokść h.*

Pole rombu $= a * h$*, obwód rombu* $=4 * a$



Romb ABCD

Zmierz boki i kąty równoległoboku. Oblicz obwód, pole i sumę kątów rombu.

$$\begin{aligned} a &= \quad\quad , b \quad = \quad\quad , c \quad = \quad\quad , d \quad = \\ Obwod &= \\ Pole &= \\ \alpha &= \quad\quad , \beta \quad = \quad\quad , \gamma \quad = \quad\quad , \delta \quad = \\ Suma &= \alpha \ + \ \beta \ + \ \delta \ + \ \gamma \ = \end{aligned}$$

1.1.4 Okrąg i koło

Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem. Na pierwszyym rysunku, zaznacz środek okręgu, promień okręgu, średnicę okręgu i obwód okręgu. Na drugim rysunku zaznacz koło.

Obwód okręgu $= 2 * \pi * r$, , pole koła $= \pi * r^2$, $\quad \pi \approx \frac{314}{100} = 3.14$.

Średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

Zadanie 1.10 *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wnętrze okręgu jako koło o promieniu 3cm.*
Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

$$\begin{aligned} srednica\ okregu &= \\ obwod\ okregu &= \\ pole\ kola &= \end{aligned}$$

1.2 Związki miarowe, proporcje i podobieństwo figur płaskich

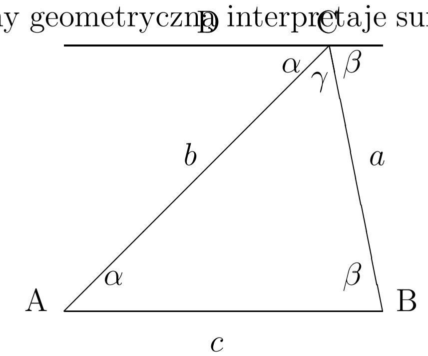
Zwiąki pomiędzy bokami i kątami trójkąta, cechy przystawania trójkątów, trójkąty podobne, proporcje, twierdzenie Talesa. miara kątowa i miara łukowa kątów, kąt śrokowy i kąt wpisany w okrąg stanowią treść następnych paragrafów

Zadanie 1.11 *Narysuj okrąg o promieniu 2cm. W tym okęgu narysuj kąt śrokowy i kąt wpisany w okrąg oparty na tym samym łuku co kąt środkowy.*

Zmierz kątomierzem kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg.

1.2.1 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0, w mierze łukowej π radianów. Niżej rozpatrzmy geometryczną interpretaje sumy kątów trójkąta.



Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0. Rzeczywiście, prosta DC jest równoległa do podstawy AB trójkąta ABC . Kąty naprzemianległe wewnętrzne α przy podstawie i α przy odcinku DC są równe, podobnie β przy podstawie AB i β przy odcinku DC są równe. Widzmy, że

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0.

1.2.2 Trójkąty przystające

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkcatów.

Pierwsza checha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.

Narysuj trójkąt o tych samych o bokach używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

Druga cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąty przyległe do tych boków równe. Sprawdzamy, że wtedy pozostałe boki muszą być równe i kąty też równe.

Trzecia cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.

1.2.3 Proporcje

Proporcja prosta. Wartości zmiennej y są proporcjonalne do wartości zmiennej x, jeżeli dla ustalonej wartości k współczynnika proporcji zachodzi równość

$$y = k * x$$

dla każdych wartości zmiennych x, y.
Wtedy mówimy, że wartości y są wprost proporcjonalne do wartości zmiennej x. To znaczy, jeżeli x rośnie to y też rośnie.

Przykład 1.4 *Następujące wartości są proporcjonale:*

$$\begin{array}{ll}
x = 1, 2, 3, 4, , 5, & y = 2, 4, 6, 8, 10 \\
y = 2 * x, & \text{wspolczynnik proporcji } k = 2 \\
x = 1, 2, 3, 4, 5, & y = 10, 20, 30, 40, 50 \\
y = 10 * x, & \text{wspolczynnik proporcji } k = 10 \\
x = 2, 4, 6, 8, 10, & y = 1, 2, 3, 4, 5 \\
y = \frac{1}{2} * x, & \text{wspolczynnik proporcji } k = \frac{1}{2}
\end{array}$$

Zadanie 1.12 *Które pary wartóści zmiennych x, y są wprost proporcjonalne? jeżeli są wprost proporcjonalne podaj współczynnik proporcjonalności.*

$$\begin{array}{lll}
(i) & x = 1, 3, 5, 7, 9, & y = 3, 9, 15, 21, 27 \\
(ii) & x = 4, 12, 20, 28, 36, & y = 1, 3, 5, 7, 9 \\
(iii) & x = 10, 30, 50, 70, 90, & y = 1, 3, 4, 7, 9
\end{array}$$

Proporcja odwrotna. Wartości zmiennej y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej x, jeżeli dla ustalonej wartości k współczynnika proporcji zachodzi równość

$$y = \frac{k}{x}$$

dla każdych wartości zmiennych x, y.
Wtedy mówimy, że wartości y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej x. To znaczy, jeżeli x rośnie to y maleje.

Przykład 1.5 *Następujące wartości są odwrotnie proporcjonale:*

$$
\begin{array}{ll}
x = 1, 2, 3, 4, 5, & y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \\
y = \frac{1}{x}, & \text{wspolczynnik proporcji } k = 1 \\
x = 2, 4, 6, 8, 10, & y = 1, 2, 3, 4, 5 \\
y = \frac{2}{x}, & \text{wspolczynnik proporcji } k = 2 \\
x = 20, 40, 60, 80, 100, & y = 2, 4, 6, 8, 10 \\
y = \frac{10}{x}, & \text{wspolczynnik proporcji } k = 10
\end{array}
$$

Zadanie 1.13 *Które pary wartóści zmiennych x, y są odwrotnie proporcjonalne? jeżeli są odwrotnie proporcjonalne podaj współczynnik proporcjonalności.*

$$
\begin{array}{lll}
(i) & x = 1, 3, 5, 7, 9, & y = 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9} \\
(ii) & x = 4, 12, 20, 28, 36, & y = \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{35}{14}, \frac{45}{18} \\
(iii) & x = 10, 30, 50, 70, 90, & y = 1, 3, 4, 7, 9
\end{array}
$$

Cztery wartości a, b, c, d są proporcjonalne, jeżeli spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{dla} \ \ b \neq 0, \ d \neq 0.$$

Wtedy prawdziwa jest też równość

$$a * d = c * b, \quad \text{mnozenie na krzyz}$$

Przykład 1.6 *Wartości $a = 1, \ b = 2, \ c = 10, \ d = 20$ są proporcjonalne, ponieważ*

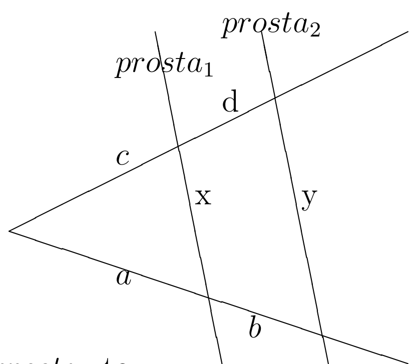
$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30},$$

mamy również

$$2 * 30 = 3 * 20 = 60$$

1.2.4 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta



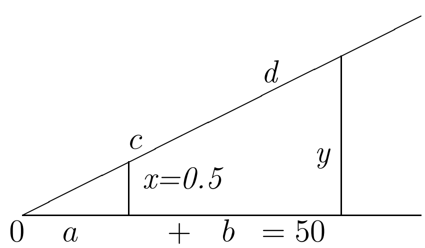
Jeżeli $prosta_1 \parallel prosta_2$ to :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

Przykład 1.7 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa y z proporcji*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b)*x}{a}$$

Dane: $a + b = 50m$, *Dokonujemy pomiarów* $a = 2m$, $x = 0.5m$ *do proporcji, zobacz na rysunku.*

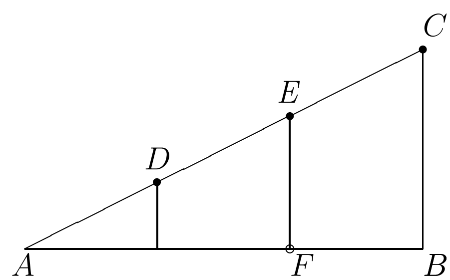


Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa $y = \dfrac{(a+b)*x}{a} = \dfrac{50*0.5}{2} = 12.5$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

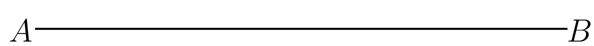
Przykład 1.8 *Podzielić odcinek AB w stosunku* 2 : 3
Rozwiązanie. *Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D, E i punkt C. Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E. W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stsunku* 2 : 3, *Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje*

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$



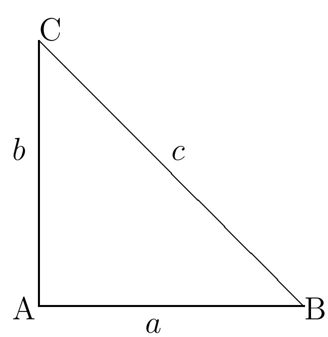
Zadanie 1.14 *Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m, wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m.*

Zadanie 1.15 *Podzielić odcinek AB w stosunku* 1 : 3



1.2.5 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa k ątów, konsrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają ztwierdzenia Pitagorasa.



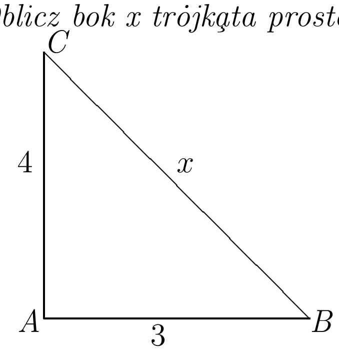
Trójkąt prostokątny ΔABC

Twierdzenie 1.1 *W trókącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

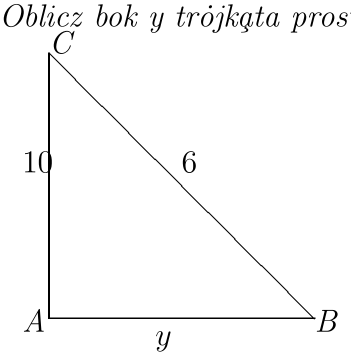
Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna, (zobacz rysunek)

Przykład 1.9 *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



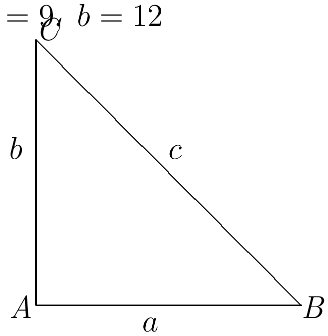
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.10 *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



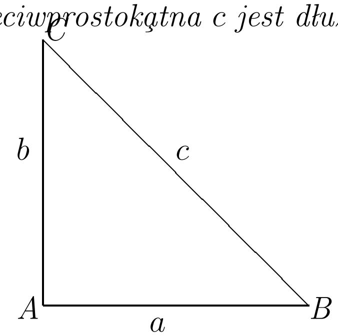
Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.11 *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że* *przyprostokątne* $a = 9$, $b = 12$



Trójkąt prostokątny ΔABC

Przykład 1.12 *Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna* $a = 12cm$*, przyprostokątna* b *jest o* $4cm$ *dłuższa od przyprostokątnej* a*, natomiast przeciwprostokątna* c *jest dłuższa o* $8cm$ *od przyprostokątnej* a*.*



Trójkąt prostokątny ΔABC

1.2.6 Miara łukowa kąta

Miarę łukową kąta α określamy jako stosunek długości łuku l opartego na kącie α do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątowej ma 360^0 oparty jest na łuku $l = 2\pi * R$ równym obwodowi okręgu. Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątowej ma 180^0 oparty jest na łuku $l = \pi * R$ równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątowej ma 90^0 oparty jest na łuku $l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$ równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta prostego ròwna jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długowci promienia R. Dlatego możemy przyjąć $R = 1$
Jednostdnostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2{*}\pi$ radianòw, ktòremu w mierze kątowej odpowiada 360^0. Zatem, jeden stopnień

$$1^0 \ = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} radianow$$

natomiast

$$1 \ radian = \frac{180}{\pi}$$

Przykład 1.13 *Oblicz miarę łukową kąta* 30^0*.*
Rozwiązanie. *Korzytamy z proporcji, kątowi* 180^0 *odpowiada miara łukowa tego kąta* π *radianòw. Zatema kątowi* 30^0 *odpowiada miara łukowa* x *radianòw. Tą proporcję zapisujemy r.ownaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową ką 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 1.16 *Oblicz miarę łukwą kątòw*

$$(i) \quad 45^0, \qquad (ii) \quad 60^0$$

1.2.7 Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg

Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu o wierzchołku w środku okręgu. Kątem wpisanym nazywamy kąt, którego trzy wierzchołki leżą na okręgu.
Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym w okrąg

Twierdzenie 1.2 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy wiekszy od kąta wpisanego*

Dowód.
Zauważamy, że trójkąty równoramienne ΔABO, ΔACO o ramionach równych promieniowi okręgu R mają kąty przy podstawach AB i AC równe β i γ, zaznaczone na rysunku.
Natstępnie zauważamy, że

$$\alpha = \beta + \gamma$$

$$2\beta + \delta_2 = \pi$$

$$2\gamma + \delta_3 = \pi$$

$$2\beta + 2\gamma + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi, \qquad \delta_2 + \delta_3 = 2\pi - 2\beta - 2\gamma$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi,$$

$$\delta_1 = 2\pi - (\delta_2 + \delta_3) = 2\pi - 2\pi + 2(\beta + \gamma) = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$$

Skąd, otrzymamy,że kąt środkowy $\delta_1 = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego α.
Wniosek: Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma 0, w mierze łukowej ma π radianów.

1.2.8 Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny oparty na średnicy AB okręgu
Z twiedzenia Pitagorasa wynika związek pomiędzy bokami trójkątata prostokątnego

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Związek ten implikuje inne miary w trókątach prostokątnych, równoramiennycj i równobocznych.
Zauważmy, że trójkąty

$$\Delta\ ABC, \quad \Delta\ ADC, \quad \Delta\ DBC$$

są podobne. Zatem na przeciw równych kątów mają proporcjonalne boki. Zproporcji

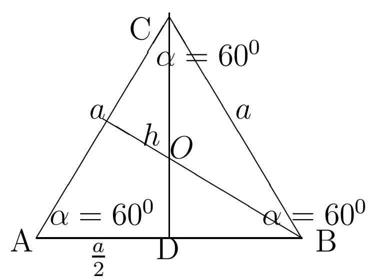
$$\frac{h}{|AD|} = \frac{|DB|}{h} \qquad \text{lub} \quad h^2 = |AD| * |DB|$$

wynika, że wysokość h równa jest średniej geometrycznej rzutów przyprostokątnych na przeciwprostkątną. To znaczy

$$h = \sqrt{|AD| * |DB|}$$

1.2.9 Trójkącie równoboczny

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ jak na rysunku



Trójkąt równoboczny ΔABC

Wysokość h trójkąta $\Delta\ ABC$ jest dwusiecznną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D. Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszcone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w jednym punkcie O. Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stusunku $1 : 3$. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąts $\Delta\ ABC$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1.3 Wielościany

Wśród wielościanów wyróżniamy bryły platońskie, których wszystkie ściany są figurami foremnymi, to znaczy mają wszystkie boki i wszystkie kąty równe. Od czasu Euklidesa wiadomo, że figur platońskich w przestrzeni jest dokładnie pięć.

- czworościan foremny, którego cztery ścieny są trójkątami równobocznymi
- sześcian foremny, którego wszystkie sześć ścian są kwadratami
- ośmiościan foremny, którego wszystkie osiem ścian są trójkątami równobocznymi
- dwunastściancian foremny, którego wszystkie dwanaście ścian są pięciokątami foremnymi
- dwudziestościan foremny, którego wszystkie dwadzieścia ścian są trójkątami równobocznymi

Czworościan foremny ma pole powierzchni całkowitej równą sumie powierzchni czterech trójkątów równobocznych o boku a

$$P_c = 4 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

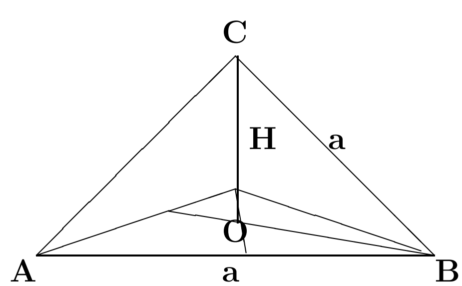


Fig. 6.2. Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3}{}\sqrt{2}$

Objętośċ czworościanu foremnego, jak każdego ostrosłupa, równa jest iloczynowi wysokości H czworościanu razy pole podatstawy. Pole podstawy to jest pole trójkąta równobocznego

$$P_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem ojętośċ czworościanu foremnego

$$V = \frac{1}{3}H * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Teraz zajmijmy się obliczeniem wysokości H. Otóż, wysokośċ H obliczymy z trójkąta prostokątnego $\Delta\, OBC$. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$|OC|^2 = |BC|^2 - |OB|^2, \quad |OC| = H, \quad |BC| = a \quad |OB| = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Skąd obliczamy

$$H^2 = a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2a^2}{3}, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Zatem, objętoś:c czworościanu foremnego

$$V = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

Szešcian foremny

Powierzchnia $P_c = 6a^2$

Ojetošč $V = a^3$

Przekątna podstawy $= a\sqrt{2}$

Przekątna szešcianu $= a\sqrt{3}$

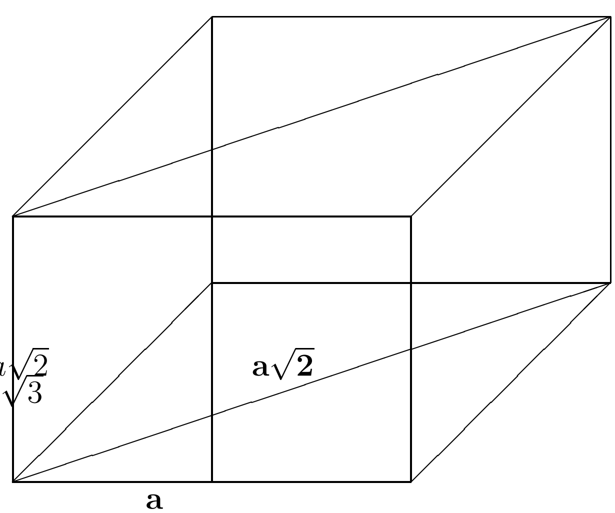


Fig. 6.1 Szešcian Foremny

1.3.1 Ostrosłup Prawidłowy o Podstawie Kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$

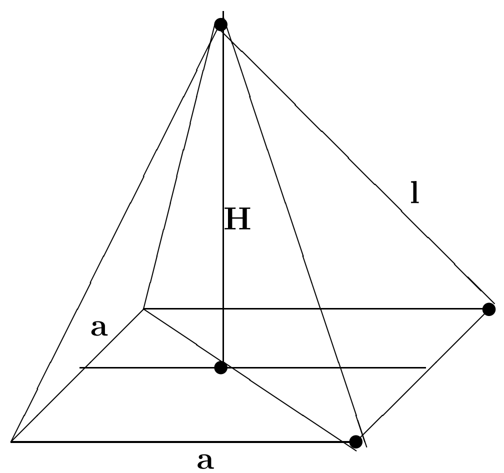


Fig. 6.3. Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}}$, $\mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

1.3.2 Ostrosłup Foremny o Podstawie Sześcioką Foremngo

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości $\mathbf{h}$. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$

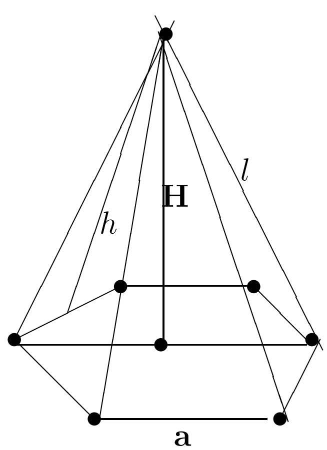


Fig. 6.4. Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}],\ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$