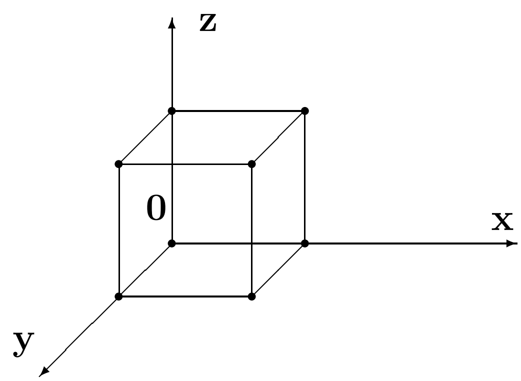
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Sześcian w układzie współrzędnych x, y, z

GEOMETRIA PRZESTRZENNA STEREOMETRIA

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018[1]

[1] Projekt trzynasty

Chapter 1

Stereometria

Stereometria to geometria figur w przestrzeni.W tym rozdziale zajmiemy sę następującymi figurami:

1. Punkty i wektory w przestrzeni.
2. Parametryczne równanie prostej
3. Proste i płaszczyzny w przestrzeni.
4. Graniastosłupy i Ostrosłópy, objętość i pole powierzchni.
5. Bryły obrotow: Walec, Kula, Stożek, objętość i pole powierzchni.

Wśród brył w przestrzeni, wyróżniamy bryły foremne i bryły platońskie. Bryły formne mają wszystkie ściany przystające. Bryły platońskie, do których należą czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan, uważane były w czasach starożytnych w Akademi Platona (427-347, B.C.) za figury idealne.

1.1 Punkty i Wektory w Przestrzeni

Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ w układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z ma współrzędną $x = a_1,\ y = a_2,\ z = a_3$.
Na punktach $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$ wykonujemy następujące operacje:

- Dodawanie punktów

$$a + b = (a_1, a_2, , a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Zatem suma punktów $a + b = c$ jest równa punktowi $c = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzcednych $c_1 = a_1 + b_1,\ c_2 = a_2 + b_2,\ c_3 = a_3 + b_3$

- Odejmowanie punktów

  $$a - b = (a_1, a_2, , a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

  Zatem różnica punktów $a - b = c$ jest równa punktowi $c = (c_1, c_2, c_3)$ o współółrzcednych $c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2,\ c_3 = a_3 - b_3$

- Mnożenie punktu przez liczbę

  $$t * a = t * (a_1, a_2, , a_3) = (t * a_1, t * a_2, t * a_3).$$

  Zatem iloczyn punktu przez liczbę jest równy punktowi $c = (c_1, c_2, c_3)$ o współrzcednych $c_1 = t*a_1,\ c_2 = t*a_2,\ c_3 = t*a_3$.

Przykład 1.1 *Niech dane będą punkty* $a = (2, -3, 4)$ *i* $b = (2, -1, 3)$. *Oblicz*

$$(i)\quad a + b, \qquad (ii)\quad a - b, \qquad (iii)\quad 2 * a + 3 * b.$$

Rozwiązanie. Obliczamy

$$\begin{aligned} (i)\quad a + b &= (2, -3, 4) + (2, -1, 3) = (2 + 2, -3 - 1, 4 + 3) = (4, -4, 7), \\ a + b &= c, \quad c = (4, -4, 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii)\quad a - b &= (2, -3, 4) - (2, -1, 3) = (2 - 2, -3 - (-1), 4 - 3) = (0, -2, 1), \\ a - b &= c, \quad c = (0, -2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii)\quad 2 * a + 3 * b &= 2 * (2, -3, 4) + 3 * (2, -1, 3) \\ &= (2 * 2 + 3 * 2, 2 * (-3) + 3 * (-1), 2 * 4 + 3 * 3) \\ &= (10, -9, 17), \end{aligned}$$

Odpowiedź: $2 * a + 3 * b = c, \quad c = (10, -9, 17)$.

Zadanie 1.1 *Niech dane będą punkty* $a = (3, 2, -1)$ *i* $b = (1, -1, 2)$. *Oblicz*

$$(i)\quad a + b, \qquad (ii)\quad a - b, \qquad (iii)\quad 3 * a + 5 * b.$$

1.1.1 Wektory w Przestrzeni

Niech dane będą punkty $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$.
Wektor $\overrightarrow{a}$ o paczątku w punkcie a i końcu w punkcie b określamy jako różnica punktów

$$\overrightarrow{a} = b - a = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Na przykład wektor o początku w punkcie $a = (0, 1, 0)$ i końcu w punkcie $b = (2, 0, 3)$ ma współrzędne

$$\overrightarrow{a} = b - a = (2, 0, 3) - (0, 1, 0) = (2, -1, 3)$$

1.1.2 Parametryczne równanie prostej w przestrzeni

Proste operacje na punktach i wektorach w przestrzeni prowadzą do parametrycznego określenia równania prostej.
Mianowicie, rozpatrzmy dwa punkty

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3), \quad \text{i wektor} \quad \overrightarrow{a} = b - a.$$

Wtedy łatwo piszemy równanie parametryczne prostej L

$$L(t) = a + tb, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Zauważmy, że jeżeli parametr t zmienia się od minus nieskończoności $-\infty$ do nieskończoności ∞, to punkt $L(t)$ poruszasza się wzdłuż prostej L.
Parametryczne równanie prostej, wyrażamy również w terminach danych punktów a i b. Ponieważ wektor $\overrightarrow{a} = b - a$, to równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty a i b ma następującą postać:

$$L(t) = a + (b - a)t \ \text{ lub } \ L(t) = a + \vec{a}t, \quad \text{lub} \quad L(t) = a(1 - t)a + b\, t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Przykład 1.2 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o począdku w punkcie $a = (1, 2, -1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{a} = (2, -1, 4)$

(ii) przechodzącej przez punkty $a = (1, -1, 2)$ *i* $b = (2, 1, 2)$

Rozwiązanie.

(i) Podstawiamy dane:

1. punkt $a = (1, -1, 2)$ i wektor $\overrightarrow{a} = (2, -1, 4)$ do ogólnego równania

   $L(t) = a+t*\overrightarrow{a} = (1, -1, 2)+t*(2, -1, 4) = (1+2t, -1-t, 2+4t).$

   Odpowiedź: $L(t) = (1 + 2t, -1 - t, 2 + 4t), \quad -\infty < t < \infty.$

(ii) Podstawiamy dane: punkt $a = (1, -1, 2)$ i punkt $b = (2, 1, 2)$ do ogólnego równania

$$\begin{aligned} L(t) &= (1-t)a + t * b = (1-t)(1, -1, 2) + t * (2, -1, 4) \\ &= ((1-t) + 2t, (1-t) - t, 2(1-t) + 4t) \\ &= (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

Odpowiedź: $L(t) = (1 + t, 1 - 2t, 2 + 2t), \quad -\infty < t < \infty.$

Zadanie 1.2 *Napisz parametryczne równanie prostej*

(i) o początku w punkcie $a = (0, 1, -1)$ *i kierunku wektora* $\overrightarrow{a} = (2, 1, 3)$

(ii) przechodzącej przez punkty $a = (3, 1, 2)$ *i* $b = (0, 2, 2)$

1.2 Płaszczyzna w Przezstrzeni

Równanie płaszczyzny w układzie współrzędnych x, y, z jest określone następująą zależnością liniową tych zmiennych

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie współczynniki A, B, C, D określają położenie prostej w układzie współrzędnych x, y, z. Zakładamy, że nie wszystkie współółczynniki A, B, C znikają jednocześnie, to znaczy $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Przykład 1.3 *Współczynniki płaszczyzny*

$$x + y + z = 0$$

są $A = 1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 0.$

Zauważmy, że ta płaszczyzna przechodzi przez początek układu współrzędnych $(0, 0, 0)$, gdyż ten punkt spełnia jej równanie $0 + 0 + 0 = 0$. Ta płaszczyzna przecina płaszczyznę rozpiętą na współrzęnych x, y, gdy $z = 0$, wzdłuż prostej o równaniu

$$x + y = 0, \quad \text{lub} \quad y = -x, \quad \text{gdy} \quad z = 0.$$

Przykład 1.4 *Napisz równanie płaszczyzny o współczynnikach* $A = 2, B = 3, C = -1, D = 0$. *Podaj rẃnanie prostej powstałej z przeciecia tej płaszczyzny z płaszczyzną układu współrzędnych* $z = 0$
o

Rozwiązanie. Równanie płaszczyzny

$$2x + 3y - z = 0.$$

Równanie prostej w płaszczyźnie x, y, gdy $z = 0$

$$2x + 3y, \quad \text{lub} \quad y = -\frac{2}{3}x, \qquad z = 0.$$

Zadanie 1.3 *Napisz równanie płaszczyzny o współczynnikach*

$$A = 1, \ B = -2, \ C = 1, \ D = 3.$$

Podaj rẃnanie prostej powstałej w przecieciu tej płaszczyzny z płaszczyzną układu współrzędnych

(i) gdy $z = 0,$

(ii) gdy $y = 0,$

(ii) gdy $x = 0.$

1.3 Równanie Prostej w Przestrzeni

Dwie płaszczyzny nie równoległe zawsze przcienają się wdłuż prostej. Dlatego równie prostej w przestrzeni wyznaczają dwie płaszczyzny. To znaczy punkty leżą na prostej w przestrzeni, jeżeli leżą na dwóch płaszczyznach. Zatem, równanie prostej w przestrzeni wyznacza układ równań

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

którego współczynniki A_1, B_1, C_1 nie są proporcjonalne do współczynników A_2, B_2, C_2. Warunek ten oznacza, że proste o tych równaniach nie są równoległe. Łatwo sprawdzamy warunek równoległości płaszczyzn, mianowicie sprawdzamy, że

$$(A_1, B_1, C_1) \neq k(A_2, B_2, C_2) = (k * A_2, k * B_2, k * C_2)$$

dla każdego k.

Przykład 1.5 *Znajdź zbiór punktów o współrzędnych (x, y, z), które leżą na prostej wyznaczonej przez następujące dwa równania płaszczyzn*

$$x + 2y - z = 0,$$

$$2x - y + z = 0.$$

Rozwiązanie. Najpierw, sprawdzamy, że te płaszcczny nie są równoległe. To znaczy wpółczynniki $(A_1, B_1, C_1) = (1, 2, -1)$ nie są proporcjonalne do współczynników $(A_2, B_2, C_2) = (2, -1, 1)$. Piszemy proporcje

$$(A_1, B_1, C_1) = (1, 2, -1) = (2k, -k, k) = (kA_2, kB_2, kC_2)$$

Porównując współrzędne, otrzymamy układ równań na parametr k

$$2k = 1, \quad k = -2, \quad k = -1,$$

który jest sprzeczny. Zatem, te płaszczyzny nie są równoległe. Teraz określamy zbiór punktów x, y, z, które należą do obu płaszczyzn. Mianowicie, z pierwszego równanie obliczmy

$$y = \frac{1}{2}(-x + z).$$

Z drugiego równania obliczamy

$$y = 2x + z$$

Porównując stronami, otrzymamy następujący związek pomiędzy x i z:

$$\frac{1}{2}(-x+z) = 2x+z, \quad \text{lub} \quad -x+z = 4x+2z, \quad \text{lub} \quad z = -5x.$$

Teraz, wyrażamy zmienną $y = 2x + z = 2x - 5x = -3x$ w zależności od zmiennej x.
Odpowiedź: Punkty o wspłrzędnych $(x, -3x, -5x)$, $-\infty < x < \infty$, leżą na przecięciu dwóch danych płaszczyzn i określą prostą w przestrzeni. Rozwiązanie w którym współrzędne punktu na prostej dane są w zależności od prametru $x \in (-\infty, \infty)$ nazywamy równaniem parametrycznym prostej. Dalej parametr będziemy oznaczali literą t.

Zadanie 1.4 *Znajdź zbiór punktów o współrzędnych (x, y, z), które leżą na prostej wyznaczonej przez następujące dwa równania płaszczyzn*

$$2x + y - z = 0,$$

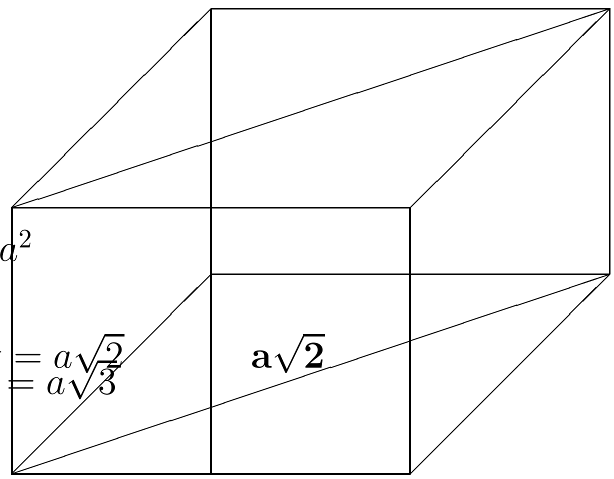
$$x - 2y + z = 0.$$

1.4 Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystajcymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany są równoległobokami. Wśród graniastosłupów, wyróżniami postopadłościany proste i prostopadłościany pochyłe.

1.4.1 Sześcian Foremny

Sześcian foremny jest prostopadłościanem, który ma wszystkie sześć ścian kwadratami o boku a.



Szešcian Foremny

W sposób oczywisty znajdujemy, że

Pole powierzchni calkowitej	$P_c = 6a^2.$
Objetosc	$V_c = a^3.$
Przekatna podstawy	$d_p = a\sqrt{2}.$
Przekatna szescianu	$d = a\sqrt{3}.$

Przykład 1.6 *Dla sześcianu o boku $a = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu $P_c = 6a^2 = 6 * 4^2 = 96$,

(ii) objętość sześcianu $V_c = a^3 = 4^3 = 64$.

(iii) przekątną podstawy sześcianu $d_p = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

(iv) przekątna sześcianu $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Zadanie 1.5 *Dla sześcianu o boku $a = 5$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni sześcianu,

(ii) objętość sześcianu.

(iii) przekątną podstawy sześcianu.

(iv) przekątna sześcianu.

1.4.2 Prostopadłościan o Podstawie Prostokątnej

Prostopadłościan o podstawie prostokąta o wymiarach podstawy a, b i wysokości h ma pole powierzchni całkowitej składające się z dwóch podstaw i czterech ścian bocznych.

$$P_c = 2a * b + 2a * h + 2b * h.$$

Objętość prostopadłościanu obliczamy z prostego wzoru

$$V = a * b * h$$

Przykład 1.7 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach*
$a = 4,\ b = 5$ *i wysokości* $h = 6$*, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów, obliczamy

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu

$$P_c = 2a*b+2a*h+2b*h = 2*4*5+2*4*6+2*5*6 = 148.$$

(ii) objętość prostopadłościanu $V = a*b*h = 4*5*6 = 120.$

Zadanie 1.6 *Dla prostopadłościanu o podstawie prostokąta o wymiarach*
$a = 2,\ b = 3$ *i wysokości* $h = 5$, *oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu,

(ii) objętość prostopadłościanu.

1.4.3 Graniastosłup o Podstawie Trójkąta Równobocznego

Prostopadłościan o podstawie trójkąta równobocznego o boku a ma ściany prostokątne o wymiarach $a \times h$, gdzie h jest wysokością tego prostopadłościanu.

(i) pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu $P_c = 2 * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(ii) objętość prostopadłościanu $V_c = h * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Przykład 1.8 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego* $a = 2$, *i wysokości* $h = 4$, *oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość sześcianu.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$

(ii) objętość sześcianu $V_c = h * \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4 * \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$

Zadanie 1.7 *Dla prostopadłościanu o boku podstawy trójkąta równobocznego* $a = 3$, *i wysokości* $h = 2$, *oblicz* *(i) pole całkowitej powierzchni,*

(ii) objętość sześcianu.

1.4.4 Graniastosłup o Podstawie Sześciokąta Foremnego

Powierzchnia całkowita i objętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego składa się z dwóch podstaw i sześciu ścian. Łatwo obliczamy pole całkowitej powierzchni i ojętość graniastosłupa o podstawie sześciokąta formnego znając bok podstawy a i wysokość h. Mianowicie, mamy następujące wzory:
Pole podstawy składa się z pól 6-ciu trójkątów róocznych

$$P_t = 6 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pole całkowite prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego

$$P_c = 2P_t + 6 * a * h = 12\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a * h, \quad P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h.$$

Objętość prostopadłościanu o pdstawie sześciokąta foremnego

$$V == 3a^2\sqrt{3} * h.$$

Przykład 1.9 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 2$ wysokości $h = 4$, oblicz*

(i) pole całkowitej powierzchni,

(ii) objętość.

Rozwiązanie. Podstawiając do wzorów na całkowitą powierzchie i objętość, oblicamy

(i) pole całkowitej powierzchni $P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6a * h = 3 * 2^2\sqrt{3} + 6 * 2 * 4 = 12\sqrt{3} +$

(ii) objętość sześcianu $V = P_c * h = 3a^2\sqrt{3} * h = 3 * 2^2\sqrt{3} * 4 = 48\sqrt{3}.$

Zadanie 1.8 *Dla prostopadłościanu o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a = 4$ wysokości $h = 5$, oblicz* *(i) pole całkowitej powierzchni,*

(ii) objętość.

1.5 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt a ściany boczne są trójkąmi o wspólnym wierzchołku. Wśród ostrosłupów wyróżniamy ostrosłupy foremne, których podstawą jest wielokąd foremny i spodek wysokości leży w środku okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

1.5.1 Czworościan Foremny

Czworościan foremny ma wszystkie cztery ściany, które są trójkątami równobocznymi. Zatem, kąty ścian mają 60^o lub w mierze łukowej $\frac{\pi}{3}$ radianów. Pole powierzchni każdej ze ścian $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a oznacza długość każdej z krawędzi czworościanu.
Pole powierzchni całkowitej czwrościanu foremnego równa się czterem razy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_c = a^2\sqrt{3}.$$

Krawędź l czworościanu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie, wiemy, że wysokość ściany bocznej $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Jej spodek leżey w połowie krawędzi podstawy $\frac{a}{2}$. Zatem obliczamy

$$l^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{a^2}{4}$$

Objętość czworościanu formnego równa jest jednej trzeciej pola podstawy razy wysokość H

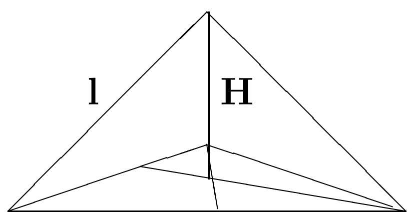
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

Wysokość H obliczamy w zależności od danej krawędzi a. Mianowicie, spodek wysokości h ściany bocznej leży na przecięciu wysokości podstawy w punkcie odległym od wierzchołka trójkąta o $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Krawędź czworościanu $l = a$. Z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy wysokość czworościanu

$$H^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h)^2 = a^2 - (\frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{2}{3}a^2, \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem ojętość czworościanu

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} * a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



Czworościan Foremny $P_c = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$

1.5.2 Ostrosłup Prawidłowy o Podstawie Kwadratu

Oznaczenia:

- a bok kwadratu w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa

- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu kwadratu $P_a = a^2$ o boku a. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu czterech trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości **h**. Natomiast, pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

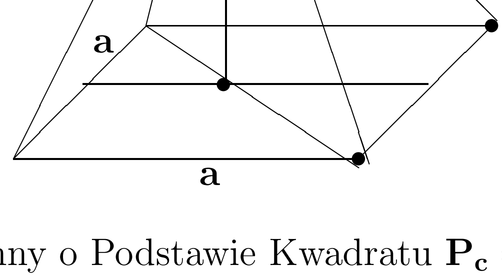
Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu czterech trójkątów w podstawie o boku a plus pola cztery trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = a^2 + 4P_0, \qquad P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}a^2 * H$$



Ostrosłup Foremny o Podstawie Kwadratu $\mathbf{P_c = a^2 + a\sqrt{4l^2 - a^2}},\ \mathbf{V = \frac{1}{3}a^2 * H}$

1.5.3 Ostrosłup Foremny o Podstawie Sześcioką Foremngo

Oznaczenia:

- a bok sześciokąta w podstawie ostrosłupa
- H wysokość ostrosłupa
- h wysokość ściany bocznej ostrosłupa
- l krawędź boczna ostrosłupa
- P_a pole podstawy ostrosłupa
- P_0 pole ściany bocznej ostrosłupa
- P_c pole powierzcni całkowitej ostrosłupa
- V objętość ostrosłupa

Jasne, że pole podstawy ostrosłupa foremnego równa się polu P_a sześciokąta foremnego o boku a

$$P_a = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego P_l równe jest polu sześciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości $\mathbf{h}$. Pole ściany bocznej ostrosłupa P_0 równe jest polu trójkąta równoramiennego o podstwie a i wysokości h.

$$P_0 = \frac{1}{2}a * h.$$

Wysokść ściany bocznej wyrażamy w zależności od boku a i krawędzi l. Mianowicie, z twierdzenia Pitagorasa oblicamy wysokość

$$h^2 = l^2 - (\frac{a}{2})^2, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Wtedy pole ściany bocznej

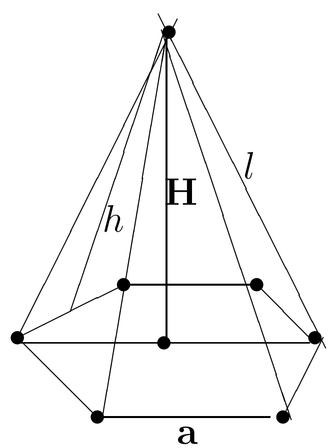
$$P_0 = \frac{1}{4}a * \sqrt{4l^2 - a^2}.$$

Pole całkowitej powierzchni ostrosłupa równe jest polu sześciokąta foremnego w podstawie o boku a plus pola sze{sciu trójkątów równoramiennych o podstawie a i ramionach l.
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa foremnego

$$P_c = P_a + 6P_0, \qquad P_c = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{4}a\sqrt{4l^2 - a^2} \qquad P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}].$$

i objętość ostrosłupa foremnego

$$V = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} * H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} * H$$



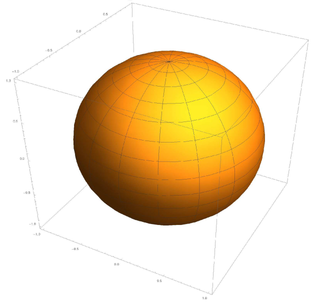
Ostrosłup $P_c = \frac{3}{2}[a^2\sqrt{3} + a\sqrt{4l^2 - a^2}],\ V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} * H$

1.6 Bryły Obrotowe

Wśród brył obrotowych wyróżniamy walec, stożek i kulę.

1.6.1 Kula

Kula o promieniu R i jej powierzchnia

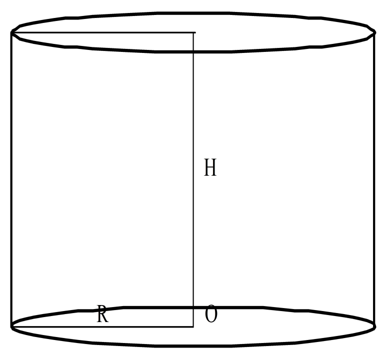


Powierzchnia kuli nazywa się sfera. Objętośċ kuli i powierzchnia sfery zależą tylko od promieniaa R

$$\begin{aligned} Objetosc\ kuli &= \frac{4}{3}\pi * R^3 \\ Powierzchnia\ sfery &= 4\pi * R^2 \end{aligned}$$

1.6.2 Walec

Walec powstaje z obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Prosty kształt walca prowadzi do oczywistych wzorów na jego całkowitą powierzchnie i objętość.



Walec Pc=2p R(R+H) V=p R^2 H

Powierzchnia całkowita walca wyrażona jest przez promień R i wysokość H.

$$P_c = 2\pi RH.$$

i objętość walca

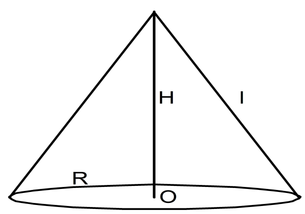
$$V = \pi R^2\ H.$$

1.6.3 Stożek

Stożek powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.
Oznaczenia:

- R promień podstawy stożka

- l tworząca stożka
- H wysokść stożka
- P_l powierzchna boczna stożka
- P_c powierzchnia całkowita stożka
- V objętość stożka



Stozek Pc= π R(R+2l)

Stozek V=$\frac{1}{3}$π R^2 H

Obliczamy

- powierzchnia podstawy $P_0 = \pi R^2$,
- powierzchna boczna stożka $P_l = 2\pi R\, l$
- powierzchnia całkowita stożka $P_c = \pi R(R + H)$
- objętość stożka $\dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.