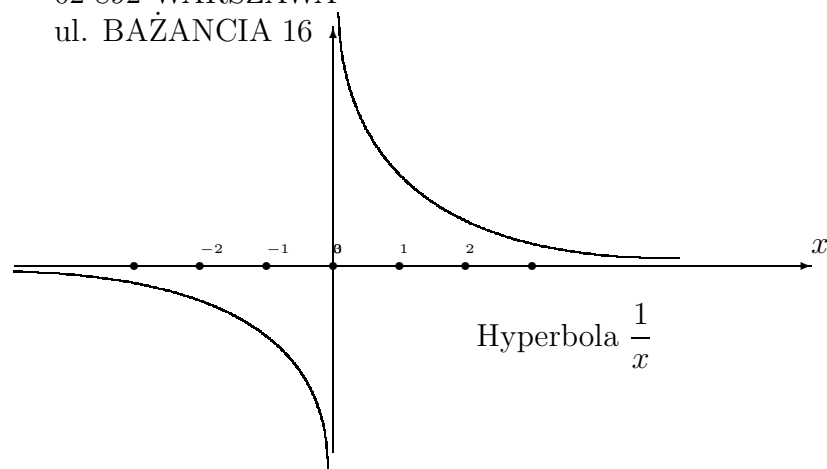


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



**FUNKCJE ELEMENTARNE
WYMIERNE POTĘGOWE LOGARYTMICZNE**

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

Warszawa 2018¹

¹Projekt dziesiąty

Contents

1	Funkcje elementarne	5
1.1	Funkcje Wymierne	5
1.1.1	Przykłady funkcji wymiernych	5
1.1.2	Rozkład Funkcji Wymiernych na Ułamki Proste	8
1.2	Funkcja Pierwiastek Kwadratowy $f(x) = \sqrt{x}$	10
1.2.1	Równania z wyrażeniem \sqrt{x}	11
1.3	Funkcja Wykładnicza	12
1.3.1	Własności funkcji wykładniczej	13
1.3.2	Równania Wykładnicze	14
1.4	Funkcja logarytmiczna	16
1.5	Logarytm naturalny	16
1.5.1	Własności funkcji logarytmicznej	16
1.6	Równania logarytmiczne	20
1.6.1	Zdania	23

Chapter 1

Funkcje elementarne

Do funkcji elementarnych zaliczamy wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze, funkcje logarytmiczne, funkcje trygonometryczne i funkcja pierwiastek kwadratowy. W rozszerzonym programie szkoły podstawowej wiedza o funkcjach elementarnych ma charakter wstępny. W rozdziale *Wielomiany* opisane zostały funkcje liniowe, trójmian kwadratowy i wielomiany stopnia n . W tym rozdziale przedstawimy niektóre z funkcji elementarnych w zakresie podstawowym wsparte licznymi przykładami i ćwiczeniami.

1.1 Funkcje Wymierne

Zbiór liczb wymiernych jest rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych. Podobnie zbiór funkcji wymiernych jest rozszerzeniem zbioru wielomianów. Mianowicie, funkcje wymierne określamy jako iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

stopni n i m , odpowiednio.

Dziedziną funkcji wymiernych jest zbiór tych liczb rzeczywistych $x \in R$ dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera. Zatem dziedziną funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór liczb rzeczywistych

$$D = \{x \in R : q_m(x) \neq 0\}$$

1.1.1 Przykłady funkcji wymiernych

Hyperbola

$$w(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

jest najprostrzą a zarazem podstawową funkcją wymierną, która charakteryzuje ważne własności wszystkich funkcji wymiernych.

Rozpatrzmy następujące własności hyperboli:

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Piszemy

$$D = \{x \in R : x \neq 0.\}$$

Również zbiorem jej wartości też jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, gdyż $\frac{1}{x} \neq 0$ dla $x \neq 0$. Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola

Fig. 3.9 Hyperbola

Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y

Przykład 1.1 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

podaj

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od -1 . Piszemy

$$D = \{x \in R : x \neq -1.\}$$

Tą funkcję wymierną zapiszemy w postaci ułamków prostych ułamki proste

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1+2-2}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 1, gdyż $w(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \neq 1$ dla $x \neq -1$.

Wykresem tej funkcji wymiernej jest hyperbola

Fig. 3.10 Asymptoty Hyperboli

Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $x = 1$ i pionową przechodzącą przez punkt $x = -1$ to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 1.2 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad -\infty < x < \infty.$$

podaj

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. asymptoty

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych. Piszemy

$$D = \{x \in R : \infty < x < \infty.\}$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział otwarty $(0, 1)$ liczb rzeczywistych dodatnich oznaczany symbolem R_+ . Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniają nierówność

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} < 1, \quad x \in R.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa

Fig. 3.11 Funkcja Wymierna

Ta funkcja wymierna ma jedną asymptotę poziomą $x = 0$ to jest oś x .

Przykład 1.3 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad -\infty < x < \infty.$$

podaj

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. asymptoty

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2 + 1 > 1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego $x \in R$. Piszemy

$$D = \{x \in R : \infty < x < \infty.\}$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1, 1)$ liczb rzeczywistych. Mi-anowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest następująca krzywa:

Fig. 3.12 Funkcja Wymierna

Ta funkcja wymierna ma jedną asymptotę poziomą $x = 0$ to jest oś x .

Zadanie 1.1 dla następującej funkcji wymiernej:

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x - 1}{x - 2},$$

$$(ii) \quad w(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4},$$

podaj

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

1.1.2 Rozkład Funkcji Wymiernych na Ułamki Proste

Ułamkiem prostym nazywamy następujące funkcje wymierne:

$$\frac{A}{x - a}, \quad \frac{A}{(x - a)^k}, \quad \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Przykład 1.4 Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste

$$w(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

podaj

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x \neq 1) \cup (x \neq -1)\}$$

Rozkładu tej funkcji wymiernej szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ lub $x \neq 1$

Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ lub $x \neq 1$.

Napiszemy tę tożsamość we wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współczynniki w licznikach przy x oraz wyrazy wolne, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A + B = 2, \quad A - B = -1.$$

Obliczamy $A = B - 1$ oraz $(B - 1) + B = 2$, $2B = 3$.

Skąd znajdujemy $B = \frac{3}{2}$, $A = B - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Rozkład tej funkcji wymiernej na ułamki proste jest następujący:

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

Przykład 1.5 Rozłóż funkcję wymierną na ułamki proste

$$w(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}, \quad \text{bo zawsze } x^2 + 1 > 1.$$

Określamy zbiór wartości tej funkcji. W dziedzinie

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\},$$

ta funkcja ma postać ułamka prostego

$$w(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)} = \frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)}$$

Zauważamy, że

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{dla wszystkich } x \in D$$

Rzeczywiście, znamy nierówność

$$(x \pm 1)^2 \geq 0, \quad 2|x| \leq x^2 + 1, \quad \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Również oczywista jest nierówność

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1, \quad \text{wszystkich rzeczywistych } x \in R.$$

dodając stronami te nierówności, otrzymamy oczekiwaną nierówność

$$\begin{array}{r} - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \\ + \quad 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \\ \hline - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

Zatem zbiorem wartości tej funkcji wymiernej jest przedział $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Wykres funkcji

Fig. 3.13 Funkcja Wymierna

Z wykresu widzimy, że asymptotą tej funkcji wymiernej jest oś x , gdy $y = 0$.

Zadanie 1.2 Rozłóż funkcje wymierne na ułamki proste

$$w(x) = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x^2 + 4)}$$

podaj

1. dziwzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

1.2 Funkcja Pierwiastek Kwadratowy $f(x) = \sqrt{x}$

Funkcje pierwiastek kwadratowy piszemy w symbolach

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{lub} \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Ogólnie, pierwiastek n -tego stopnia piszemy

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \text{lub} \quad f(x) = x^{\frac{1}{n}}.$$

Dziedziną funkcji pierwiastek kwadratowy jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, to jest przedział lewostronnie domknięty $[0, \infty)$. Również zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[0, \infty)$, czyli wszystkie liczby rzeczywiste nieujemne, włączając zero.

Wykres funkcji pierwiastek kwadratowy

Fig. 3.14 Funkcja Pierwiastek Kwadratowy

Równania i nierówności z wyrażeniami zawierającymi pierwiastek kwadratowy rozwiązujemy ze szczególną ostrożnością mając na uwadze stosowanie relacji nie równoważnych.

1.2.1 Równania z wyrażeniem \sqrt{x}

Rozwiązywanie równań z wyrażeniem \sqrt{x} wyjaśniamy w następujących przykładach:

Przykład 1.6 *Rozwiąż równanie:*

$$x = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $[0, \infty)$. Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$x^2 = x, \quad -\infty < x < \infty,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych włączając liczby ujemne. Zatem te dwa równania mają różne dziedziny i dlatego nie są równoważne. Łatwo znajdujemy rozwiązanie

$$x - x^2 = 0, \quad x(x - 1) = 0, \quad x = 0, \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Sprawdźmy, że oba zera funkcji $x = 0$ lub $x = 1$ należą do dziedziny $[0, \infty)$. Zatem to równanie ma dwa zera $x = 0$, $x = 1$.

Przykład 1.7 *Rozwiąż równanie:*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1, \quad x \geq 1.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedziale $(1, \infty)$. Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (x-1) = 1, \quad \text{lub} \quad 2x - 2\sqrt{x^2 - 1} = 1 \quad 1 < x < \infty,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych $x < -1$ lub $x > 1$ włączając liczby ujemne mniejsze od -1 . Zatem te dwa równania mają różne

dziedziny i dlatego nie są równoważne.

To równanie piszmy w postaci

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} - x, \quad x \geq 1.$$

Jeszcze raz podnosząc stronami, otrzymamy równanie też nie równożne

$$x^2 - 1 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2, \quad \text{lub} \quad x^2 - 1 = \frac{1}{4} - x + x^2, \quad \text{lub}, \quad x - \frac{5}{4} = 0,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązaniem tego równania jest liczba $x = \frac{5}{4} > 1$, która należy do dziedziny równania.

Sprawdzamy, że

$$\sqrt{\frac{5}{4} + 1} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = 1, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

1.3 Funkcja Wykładnicza

Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0$, $a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzeczywistych

$$D = \{x \in R : -\infty < x < \infty\}.$$

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór R_+ liczb dodatnich.

Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$, $-\infty < x < \infty$

Fig. 3.15 Funkcja Wykładnicza

Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x . To jest zbiór punktów $(x, 0)$ gdy współrzędna $y = 0$.

Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca jeżeli jej podstawa $a > 1$. Natomiast funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$. Na rysunku funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument x też wzrasta.

Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy jej podstawa $0 < a = \frac{1}{2} < 1$.

Fig. 3.16 Funkcja Wykładnicza

Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jest malejąca, gdyż jej wykres maleje podczas gdy argument rośnie.

1.3.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze $x = 0$ równa jest jeden.

$$f(0) = 1, \quad \text{ponieważ} \quad f(0) = a^0 = 1,$$

dla każdej podstawy $a > 0$.

2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a .

$$f(1) = a, \quad \text{ponieważ} \quad f(1) = a^1 = a,$$

3. funkcja wykładnicza od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości

$$f(x + t) = f(x) * f(t)$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$f(x + t) = a^{x+t} = a^x * a^t = f(x) * f(t)$$

4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości

$$f(x - t) = \frac{f(x)}{f(t)}$$

Rzeczywiście sprawdzamy, że

$$f(x - t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{f(x)}{f(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

$$f(x * t) = (f(x))^t$$

Sprawdzamy, że

$$f(x * t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (f(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n -tego stopnia z wartości m -tej potęgi

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{f(m)}$$

Mianowicie

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{f(m)}$$

Przykład 1.8 Oblicz wartość wyrażenia

$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:

W tym przykładzie stosujemy własność 2 do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy

$$f(3) * f(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 1.9 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:

Korzystając z własności funkcji wykładniczej, obliczamy

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} * (3 * 4)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$(i) \quad \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}, \quad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 1.4 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*

$$f(x) = 2^x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej

$$y = f(x - 1) + 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

w układzie współrzędnych x, y

Oblicz wartość funkcji $f(x - 1) + 1$ dla $x = 3$.

1.3.2 Równania Wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystając z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla $-\infty < x < \infty$.
- zbiorem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $f(0) = 1$ dla każdej podstawy $a > 0$, $a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżeli podstawa $a > 1$.
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżeli podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzeczywistych R . Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Obliczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \quad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x , obliczamy rozwiązanie:

$$\text{Jeżeli } 2^x = 1, \text{ to } x = 0.$$

$$\text{Jeżeli } 2^x = 2, \text{ to } x = 1.$$

Przykład 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = r - \{\frac{1}{3}\}$.

Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x - 1}{3x - 1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$2x - 1 = 2(3x - 1), \quad 2x - 1 = 6x - 2, \quad 4x = 1, \quad x = \frac{1}{4}$$

Zadanie 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 1.6 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$

1.4 Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0$, $a \neq 1$ nazywamy podstawą logarytmu.

Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = \log_{10} y, \quad \text{dla } y > 0$$

Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym i ma charakter podstawowy-standardowy. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y . Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x , natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y , która zależy od x .

Dlatego logarytm dziesiętny jest oznaczany symbolem

$$y = \log x, \quad x > 0,$$

bez pisania podstawy logarytmu 10.

1.5 Logarytm naturalny

Logarytm naturalny jest odwrotną funkcją do funkcji potęgowej

$$y = e^x, \quad \text{lub} \quad y = \text{Exp}[x], \quad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\dots;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

1.5.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = 1$ równa jest zero.

$$g(1) = \log_a 1 = 0, \quad \text{ponieważ } a^0 = 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = a$ równa jest jeden.

$$g(a) = \log_a a = 1, \quad \text{ponieważ } a^1 = a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości

$$\log_a x * t = \log_a x + \log_a t, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a x, \quad g(x * t) = g(x) + g(t), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = \log_a x, \quad to \quad x = a^{y_1}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$y_2 = \log_a t, \quad to \quad t = a^{y_2}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$x * t = a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$\log_a x * t = \log_a a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2 = \log_a x + \log_a t$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości

$$\log_a \frac{x}{t} = \log_a x - \log_a t, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a x, \quad g\left(\frac{x}{t}\right) = g(x) - g(t), \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = \log_a x, \quad to \quad x = a^{y_1}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$y_2 = \log_a t, \quad to \quad t = a^{y_2}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$\frac{x}{t} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$\log_a \frac{x}{t} = \log_a a^{y_1 - y_2} = y_1 - y_2 = \log_a x - \log_a t$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu x^k , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$; równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x

$$\log_a x^k = k * \log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Własność ta bezporednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie

$$\log_a x^k = \underbrace{\log_a x * x * \dots * x}_k = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_k = k * \log_a x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi

$$\log x^{\frac{m}{n}} = m * \log \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmicznej i wykładniczej

$$\log_a x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a \sqrt[n]{x} + \log_a \sqrt[n]{x} + \dots + \log_a \sqrt[n]{x}}_m = m * \log_a \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $b > 0$, możemy zmienić podstawę a logarytmu $\log_a b$ na podstawę c według wzoru

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a b, \quad q = \log_c b, \quad r = \log_c a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{aligned} b &= (c^r)^p, & b &= c^{p*r}, \\ \log_c b &= p * r \log_c c, & \log_c c &= 1, \\ \log_c b &= p * r, & \log_c b &= \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}, \end{aligned}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytmowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad \text{bo} \quad \log_b b = 1$$

Przykład 1.12 Oblicz logarytm

$$(i) \log_2 64, \quad (ii) \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$\begin{aligned} (i) \quad \log_2 64 &= \log_2 2^6 = 6, & \text{bo} \quad 2^6 &= 64, \\ (ii) \quad \log_5 125 &= \log_5 5^3 = 3 & \text{bo} \quad 5^3 &= 125. \end{aligned}$$

Przykład 1.13 *Oblicz wartość wyrażen logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5},$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5),$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \frac{4 \log_3 5}{\log_3 5} = 4$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \frac{1}{2} * \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Przykład 1.14 *Oblicz wartość wyrażen logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4 16) = \log_2 2 \log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3 \log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 1.7 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_3 81, \quad (ii) \quad \log_7 16807$$

Zadanie 1.8 *Oblicz wartość wyrażen logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$

$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 1.9 *Oblicz wartość wyrażen logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_5(\log_5 3125),$$

$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

1.6 Równania logarytmiczne

Równanie w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się równaniem logarytmicznym. Rozwiązując równanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy określić dziedzinę równania. To jest ten zbiór argumentu x dla którego równanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie równania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny równania jest istotne, ponieważ rozwiązując równanie oryginalne przekształcamy to równania w równania o prostrzej strukturze, które mogą mieć pierwiastki z poza dziedziny równania oryginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania równań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych.

Przykład 1.15 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x . Zatem dziedziną tego równania jest zbiór $x > 0$. Piszemy

$$0 < x < \infty \quad \text{lub} \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika równość

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny równania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4, \quad \log_2 2 = 1.$$

Przykład 1.16 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

Rozwiązanie:

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad \text{i} \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x < 5 \quad \text{lub} \quad x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \quad \text{lub} \quad x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5-x) + \log_3(5+x) = \log_3(5-x)(5+x) = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5-x)(5+x) = 3^2, \quad \text{lub } 25 - x^2 = 9 \quad \text{lub } x^2 = 16.$$

Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{16} = 4.$$

Skąd mamy dwa rozwiązania

$$\text{gdy } |x| = 4 \text{ to } x_1 = -4 \quad \text{lub} \quad x_2 = 4.$$

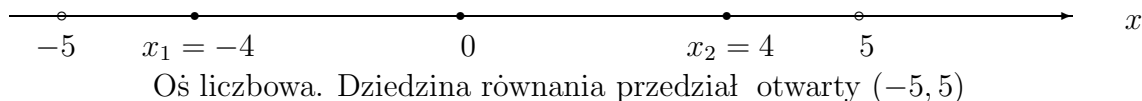
Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należy do dziedziny równania

$$\log_3(5+4) + \log_3(5-4) = \log_3 9 * 1 = \log_3 3^2 = 2$$

oraz

$$\log_3(5-4) + \log_3(5+4) = \log_3 1 * 9 = \log_3 3^2 = 2.$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1 = -4 \in (-5, 5)$ i $x_2 = 4 \in (-5, 5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Przykład 1.17 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 1$$

Rozwiązanie:

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x-2 > 0 \quad \text{i} \quad x-4 > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x > 2 \quad \text{lub} \quad x > 4.$$

Wtedy piszemy dziedzinę tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x > 4 \quad \text{lub} \quad x \in (4, \infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = \log_3(x-2)(x-4) = 1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x-2)(x-4) = 3^1, \quad \text{lub } x^2 - 6x + 8 = 3 \quad \text{lub } x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:

Wyróżnik równania

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

o współczynnikach $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c = 6^2 - 4 * 1 * 5 = 36 - 20 = 16.$$

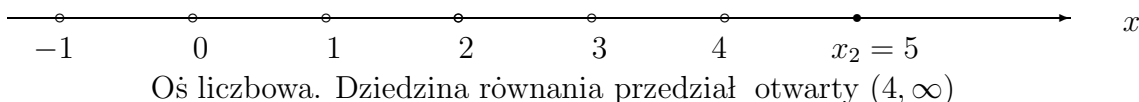
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1 = 1 \notin (4, \infty)$ nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2 = 5$ spełnia równanie

$$\log_3(5-2) + \log_3(5-4) = \log_3 3 * 1 = \log_3 3 = 1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Przykład 1.18 Rozwiąż równanie

$$\log_2(\log_4 x) = 1.$$

Rozwiązanie:

Dziedziną tego równania jest zbiór tych x dla których

$$\log_4 x > 1, \quad x > 4, \quad x \in (4, \infty)$$

Z definicji logarytmu wynika równość

$$\log_4 x = 2^1, \quad x = 4^2, \quad x = 16$$

Rozwiązanie $x = 16 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny. Sprawdzamy, że $x = 16$ spełnia równanie

$$\log_2(\log_4 16) = \log_2(\log_4 4^2) = \log_2(2 \log_4 4) = \log_2 2 = 1$$

1.6.1 Zdania**Zadanie 1.10** *Rozwiż równanie*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 1.11 *Rozwiż równanie*

$$\log_4(1 - x) - \log_4(1 + x) = 0.$$

Zadanie 1.12 *Rozwiż równanie*

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 2) = 1$$

Zadanie 1.13 *Rozwiż równanie*

$$\log_4(\log_8 x) = 1.$$