SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Opercja modulo

$a \equiv b(\ mod\ c)$

MATEMATYKA
DZIELENIE LICZB Z RESZTĄ
CECHY PODZIELNOŚCI

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2018[1]

[1]Projekt piąty

Contents

Chapter 1

Dzielenie z resztą. Cechy podzielności. Kongruencja.

1.1 Wstęp

Projekt ten jest opracowany dla rozszerzonego programu matematyki w Szkole Podstawowej Heliantus i dotyczy podzielności liczb naturalnych. Treść projektu, ćwiczenia, przykłady i zadania dostosowane są do poziomu uczniów klas starszych szkoły podstawowej.

Operacje dzielenia z resztą i cechy podzielności liczb naturalnych opisane są w sytemie dziesiętnym.

Cechy podzielności liczb naturalnych przez 3, 9 i przez 5 oraz dzielnie liczb całkowitych z resztą podane są w paragrafach &2, &3 *i* &4.

W paragrafie &5 wprowadzone jest pojęcie liczb przystających i operacja dzielenia z resztą modulo n. Pojęcie kongruencji czyli przystawania liczb całkowitych a i b względem liczby naturalnej n wykracza poza podstawę programową, jednak jest istotnym tematem w programie rozszerzonym. Podobnie równanie liniowe Diofantosa i roszerzony algorytm Euklidesa opisane w paragrafie &6 wykraczają poza podstawę programową ale doskonale pasują do programu rozszerzonego w ramach kółka z matematyki dla klas starszych.

W ostatnich paragrafach &7 i &8 podane są ćwiczenia z zadaniami dostosowanymi do programu podstawowego i do programu rozszerzonego.

1.2 Cechy podzielności liczb naturalnych

Cechy podzielności liczb naturalnych wynikają z ogólnego zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym, każdą liczbę n-cyfrową piszemy w postaci

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0 \\ &= \alpha_{n-1}*10^{n-1}+\alpha_{n-2}*10^{n-2}+\cdots+\alpha_1*10^1+\alpha_0*10^0 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$$

są cyframi liczby m o wartościach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Teraz sformułujemy i podamy prosty dowód cechy podzielności liczby naturalnej przez 3

1.2.1 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 3 lub przez 9

Liczba naturalna

$$m = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0$$

jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr

$$\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0$$

dzieli się przez 3. Ponadto, jeżeli suma cyfr liczby m dzieli się przez 9 to liczba m rownież jest podzielna przez 9.
Zanim podamy dowòd tej cechy, rozpatrzmy kilka przykładòw jej zastosowania.

Przykład 1.1 *Niech $m = 24$. Cytry tej liczby dwucyfrowej, gdy $n = 2$, to $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_0 = 4$*
Suma cyfr

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 2 + 4 = 6$$

jest podzielna przez 3. Zatem liczba 24 jest podzielna przez 3. Rzeczywiście

$$24 : 3 = 8$$

Przykład 1.2 *Niech $m = 381$. Cytry tej liczby trzycyfrowej, gdy $n = 3$, to $\alpha_2 = 2 = 3$, $\alpha_1 = 8$ i $\alpha_0 = 1$*
Suma cyfr

$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 3 + 8 + 1 = 12$$

jest podzielna przez 3, bo $12 : 3 = 4$. Zatem liczba 381 jest podzielna przez 3. Rzeczywiście

$$381 : 3 = 127$$

Przykład 1.3 *Niech $m = 5673$. Cytry tej liczby czterocyfrowej $n = 4$, to $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 7$ i $\alpha_0 = 3$*
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 5 + 6 + 7 + 3 = 21$$

jest podzielna przez 3. Zatem liczba 5673 jest podzielna przez 3. Rzeczywiście

$$5673 : 3 = 1891$$

Przykład 1.4 *Niech $m = 48537$. Cytry tej liczby pięciocyfrowej, gdy $n = 5$, to $\alpha_4 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ i $\alpha_0 = 7$*
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 4 + 8 + 5 + 3 + 7 = 27$$

jest podzielna przez 3 i przez 9. Zatem liczba 5673 jest podzielna przez 3 i przez 9. Rzeczywiście

$$48537 : 3 = 16177, \quad i \quad 48537 : 9 = 5393$$

Dowód w przypadku liczb dwucyfrowych. Liczby dwucyfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned}
\alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_1 * 10 + \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\
&= \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_0) \\
&= 9 * \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_0)
\end{aligned}$$

zawiera składnik $9 * \alpha_1$ z czynnikiem 9, zatem ten składnik jest podzielny przez 3 i przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielny przez 3 lub 9 to liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 to suma jej cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ też jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym. W tym przykładzie jest to warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

Powtóżmy dowód cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Dowód w przypadku liczb trzycyfrowych. Liczby trzycfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned}
\alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 \\
&\quad -(\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= \alpha_2 * (100 - 1) + \alpha_1(10 - 1) + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \\
&= 99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0)
\end{aligned}$$

zawiera składnik $99 * \alpha_2 + \ 9 * \alpha_1$, który dzieli się przez 3 i przez 9. Zatem, jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9 to liczba m jest również podzielna przez 3 lub przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielny przez 3 lub 9 to liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Prawdą jest ròwnież zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 to suma jej cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ też jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m jest podzielna przez 3 lub przez 9 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr $\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

W przypadku ogòlnym dla liczb *n-cyfrowych*, schemat dowòdu cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 jest taki sam jak dla liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych.

1.2.2 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 5

Bardzo łatwo rozpoznać liczbę m, ktòra jest podzielna przez 5. Mianowicie, zachodzi następujące cecha podzielności:

Liczba naturalna m jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfry jedności są 0 lub 5.

Przykład 1.5 *Łatwo sprawdzamy, że liczby*

$$30, 35, 40, 45, 150, 155, 2360, 2365, 9800, 9855, 9890, 9995$$

są podzielne przez 5

Dowòd cechy podzielności liczby m przez 5.

Dla uproszczenia , rozpatrzymy liczbę trzycyfrową m, ktòra ma cyfrę jedności 0 lub 5. Wtedy liczba m rozkłada się na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalą. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 + 5 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1 + 1) \end{aligned}$$

W przypadku ogòlnym liczb n-cyfrowych, ktòre mają cyfrę jedności 0 lub 5 mamy ròwnież rozkład liczby m na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalną. Mianowicie

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 \\ &= 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$m = 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_2 + \alpha_1)$$

Zatem w przypadku ogòlnym liczba m, ktòra ma cyfrę jedności 0 lub 5 jest podzielna przez 5.

1.3 Dzielenie liczb przez 3 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 3 lub dzieli się przez 3 z resztą 1 lub resztą 2.

Wtedy piszemy

$$m = 3k \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3$$

$$m = 3k + 1 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3, \quad reszta \ 1$$

$$m = 3k + 2 \quad gdy \quad liczba \quad m \quad jest \quad podzielna \quad przez \ 3, \quad reszta \ 2$$

Przykład 1.6 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- $33 : 3 = 11 \quad reszta \quad 0$
- $34 : 3 = 11 \quad reszta \quad 1$
- $35 : 3 = 11 \quad reszta \quad 2$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{33}{3} = 11 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3} \quad reszta \quad 2$

Przykład 1.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 36*. Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3

$$3k - 3, \ 3k, \ \ 3k + 3$$

Suma tych liczb

$$(3k - 3) + 3k + (3k + 3) = 9k = 36$$

Skąd obliczamy

$$9k = 36, \qquad k = 36 : 9 \qquad k = 4.$$

Odpowiedź:

$$3k - 3 = 3 * 4 - 3 = 9,$$

$$3k = 3 * 4 = 12,$$

$$3k + 3 = 3 * 4 + 1 = 15$$

Kolejnymi liczbami podzielnymi przez 3, których suma równa jest 36 są liczby

$$9, \qquad 12 \qquad 15$$

Sprawdzenie:

$$9 + 12 + 15 = 36$$

Zadanie 1.1 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 72. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.2 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 75 *jest równa* 1. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.3 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 2 *jest równa* 105. *Jakie to liczby?*

1.4 Dzielenie liczb przez 5 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 5 lub dzieli się przez 5 z resztą 1 lub resztą 2 lub z resztą 3 lub z resztą 4.

Wtedy piszemy

$$\begin{array}{llllllll}
m = 5k & gdy & liczba & m & jest & podzielna & przez & 5 \\
m = 5k+1 & gdy & liczba & m & jest & podzielna & przez & 5, \quad reszta \ 1 \\
m = 5k+2 & gdy & liczba & m & jest & podzielna & przez & 5, \quad reszta \ 2 \\
m = 5k+3 & gdy & liczba & m & jest & podzielna & przez & 5, \quad reszta \ 3 \\
m = 5k+4 & gdy & liczba & m & jest & podzielna & przez & 5, \quad reszta \ 4
\end{array}$$

Przykład 1.8 *Wykonaj dzielenie przez* 5 *z resztą*

- $35 : 5 = 7 \quad reszta \quad 0$
- $36 : 5 = 7 \quad reszta \quad 1$
- $37 : 5 = 7 \quad reszta \quad 2$
- $38 : 5 = 7 \quad reszta \quad 3$
- $39 : 5 = 7 \quad reszta \quad 4$

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{35}{5} = 7 \quad reszta \quad 0$
- $\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5} \quad reszta \quad 1$
- $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 2$
- $\frac{38}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 3$
- $\frac{39}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 4$

Przykład 1.9 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *równa jest* 45. *Jakie to liczby?*

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3 **Rozwiązanie.**

$$5k-5,\ 5k,\ \ 5k+5$$

Suma tych liczb

$$(5k-5)+5k+(5k+5)=15k=45$$

Skąd obliczamy k

$$15k=45, \qquad k=45:15 \qquad k=3.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 45

$$5k-5=5*3-5=10,$$

$$5k=5*3=15,$$

$$5k+5=5*3+5=20$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$10, \qquad 15 \qquad 20$$

Sprawdzenie:

$$10+15+20=45$$

Zadanie 1.4 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 1 *równa jest* 108. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.
Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 1

$$5k+1,\ 5k+6,\ \ 5k+11$$

Suma tych liczb

$$(5k+1)+(5k+6)+(5k+11)=15k+18=108$$

Skąd obliczamy k

$$15k=90, \qquad k=90:15 \qquad k=6.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 108

$$5k+1=5=5*6+1+31,$$

$$5k+6=5*6+6=36,$$

$$5k+11=5*6+11=41$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$31, \qquad 36 \qquad 41$$

Sprawdzenie:

$$31+36+41=108$$

Zadanie 1.5 *Suma dwóch kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *jest równa* 79. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.6 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 3 *jest równa* 129. *Jakie to liczby?*

1.5 Liczby przystające. Kongruencja

Liczby całkowite a i b nazywamy przystające względem liczby naturalnej n, jeżeli ich różnica $a - b$ jest podzielna przez n.
Na przykład

13 przystaje do 3 względem 2, bo $(13 - 3) : 2 = 5$, gdy $a = 13,\ b = 3,\ n = 2.$

47 przystaje do 35 względem 6, bo $(47 - 35) : 6 = 2$,

gdy $a = 47,\ b = 35,\ n = 6.$

Liczby przytające są również nazywane liczbami kogruentnymi. Kongruencja po polsku znaczy przystawanie.
Karol Gauss (1777-1835) wprowadził oznaczenia operacji modulo.

$$a \ \equiv \ b(mod\ n)$$

Powyższy zapis rozumiemy, że różnica $a - b$ jest podzielna przez n. To znaczy

$$a - b = k * n$$

dla pewnej liczby całkowitej k.

Przykład 1.10 *Pisząc*

$$27 \ \equiv \ 13(mod\ 7)$$

rozumiemy, że różnica $27 - 13$ *jest podzielna przez 7. W tym przykładzie*

$$(27 - 13) : 7 = 2.$$

To znaczy, że $27 - 13 = 2 * 7$ *dla* $k = 2$.

Przykład 1.11 *Które kongruencje są prawdziwe?*

$$7 \equiv 3(mod\ 2), \quad prawdziwa\ bo \quad (7 - 3) : 2 = 4 : 2 = 2$$

$$12 \equiv 5(mod\ 4), \quad nieprawdziwa\ bo \quad (12 - 5) = 7, \ \ 7\ niepodzielne\ przez\ 4$$

1.5.1 Dzielenie modulo

Wynik dzielenia modulo liczby całkowitej a przez liczbę naturalą n równy jest reszcie z dzielenia liczby a przez liczbę n. Zatem, operacja modulo określona jest na zbiorze liczb całkowitych.
Na przykład

$$r = 25(mod\ 15) = 10 \quad bo \quad 25 : 15 = 1 + reszta \quad 10$$

$$r = 37(mod\ 12) = 1 \quad bo \quad 37 : 12 = 3 + reszta \quad 1$$

Dokładny wylnik

$$\frac{25}{15} = 1 + \frac{10}{15}$$
$$\frac{37}{12} = 3 + \frac{1}{12}$$

Wedy piszemy

$$r = a(mod\, n), \quad 25(mod 15) = 10, \quad gdy \quad a = 25, \quad n = 15, \quad reszta \quad r = 10$$

$$r = a(mod\, n), \quad 37(mod 12) = 1, \quad gdy \quad a = 37, \quad n = 12, \quad reszta \quad r = 1$$

Przykład 1.12 *Oblicz* $47(mod\, 5)$

Obliczamy

$$47 : 5 = 9 + reszta \quad 2,$$

Odpowiedź:

$$47(mod\, 5) = 2$$

Przykład 1.13 *Oblicz* $123(mod\, 7)$

Obliczamy

$$123 : 7 = 17 + reszta \quad 4,$$

Odpowiedź:

$$123(mod\, 7) = 4$$

1.5.2 Własności operacji modulo

Relacja $\equiv$ kongruencji, to znaczy relacja przystawania liczb całkowitych ma podobne własności jak zwykła relacja ròwności $=$.
Własności kongruencji:

1. **Własnośċ symetrii**

   $a \equiv b(mod\, n) \quad to \quad b \equiv a(mod\, n)$

   Przykład 1.14 *Rozpatrzmy kongruencje*

   $$15 \equiv 3(mod\, 4) \qquad i \quad 3 \equiv 15(mod\, 4)$$

   $$a = 15, \quad b = 3$$

   Liczby $a = 15$ i $b = 3$ są przystające względem liczby naturalnej $n = 4$ w obu przypadkach, gdyż

   $$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \quad (3 - 15) : 4 = -3$$

2. **Operacja przechodnia**

   Jeżeli liczby a i b oraz liczby b i c są przystające względem liczby n, to znaczy prawdziwe są kongruencje

   $$a \equiv b((mod\, n) \;\; i \quad b \equiv c(mod\, n)$$

   to liczby a i c też są przystające względem liczby n, to znaczy

   $$a \equiv c(mod\, n)$$

Przykład 1.15 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

$$20 \equiv 12(mod\,4) \qquad i \quad 12 \equiv 8(mod\,4),$$

$$a = 20, \quad b = 12, \quad c = 8, \quad n = 4.$$

Liczby $a = 20$ i $c = 8$ też są przystające względem liczby 4, gdyż

$$20 \equiv 8(mod\,4)$$

ponieważ różnica

$$(20 - 8) : 4 = 3$$

3. **Dodawanie i mnożenie kongruencji**
Jeżeli prawdziwe są kongruencje

$$a \equiv b(mod\,n) \quad i \quad c \equiv d(mod\,n)$$

to suma stron tych kongruencji

$$a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\,n)$$

oraz iloczyn stron tych kongruencji

$$a \cdot c \equiv b \cdot d(\mathrm{mod}\,n)$$

Przykład 1.16 *Rozpatrzmy dwie kongruencje*

$$15 \equiv 3(mod\,4) \qquad i \quad 20 \equiv 5(mod\,4)$$

$$a = 15, \quad b = 3 \quad c = 20, \quad d = 4, \quad n = 4$$

Liczby 15 i 3 są przystają względem liczby naturalnej $n = 4$, gdyż różnice

$$(15 - 3) : 4 = 3 \qquad i \quad (3 - 15) : 4 = -3$$

są podzielne przez 4.

4. **Mnożenie kongruencji przez siebie. Potęga Kongruencji.** Mnożąc stronami kongruencję

$$a \equiv b(mod\,n)\}$$

przez siebie, otrzymamy

$$a^2 \equiv b^2(\mathrm{mod}\,n), \quad a^3 \equiv b^3(mod\,n)\}, \ \ldots, a^k \equiv b^k(mod\,n)\}$$

dla każdego naturalnego $k = 1, 2, 3, \ldots;$

Przykład 1.17 *Rozpatrzmy kongruencje*

$$9 \equiv 3(mod\,2)$$

$$a = 9, \quad b = 3, \quad n = 2.$$

Mnożąc tą kongruencje stronami, otrzymamy

$$9^2 \equiv 3^2 (mod\ 2), \quad 9^3 \equiv 3^3 (mod\ 2), ..., 9^k \equiv 3^k (mod\ 2)$$

lub

$$81 \equiv 9(mod\ 2), \quad 729 \equiv 27(mod\ 2),\ \dots, 9^k \equiv 3^k (mod\ 2)$$

Sprawdzamy:

$$(81 - 9) : 2 = 36, \qquad (729 - 27) : 2 = 702 : 2 = 351, ..., (9^k - 3^k) : 2 =) : 2$$

Różnica $9^k - 3^k$ jest również podzielna przez 2. Ponieważ cyfry jedności liczb 9^k i 3^k są nieparzyste. Mianowicie cyfry jedności liczby 9^k to

$$1, 9, 1, 9, 1, 9, ...;$$

i cyfry jedności liczby 3^k to

$$9, 7, 1, 9, 7, 1, ...;$$

Różnica liczba nieparzystych jest liczbą parzystą.
Zatem liczba $9^k - 3^k$ jest podzielna przez 2 dla każdej liczby naturalnej $k = 1, 2, 3, ...;$
Skąd wynika, że liczby 9^k i 3^k są przystające modulo 2.

Przykład 1.18 *Liczba*

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10.

Podnosząc stronami kongruencje

$$43 \equiv 33(mod\ 10)$$

do potęgi 125, otrzymamy kongruencje

$$43^{125} \equiv 33^{125}(mod\ 10)$$

Liczba 43 przystaje do liczby 33 modulo 10, gdyż

$$(43 - 33) : 10 = 1$$

Dlatego liczba 43^{125} przestaje do liczby 33^{125} modulo 10. Zatem różnica

$$43^{125} - 33^{125}$$

jest podzielna przez 10. Zastosowanie kongruencji do sprawdzania podzielności liczb wskażemy w następującym przykładzie

Przykład 1.19 *Stosując własność mnożenia stronami kongruencji, potęgowania stronami kongruencji, udowodnij, że liczba* $7^{246} + 1$ *jest podzielna przez* 10.

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba $7^2 + 1 = 50$ jest podzielna przez 10. To znaczy, że liczba 49 przystaje do liczby -1 modulo 10. Zatem mamy

$$49 \equiv -1(mod\ 10)$$

Podnosząc stronami tą kongruencje do potęgi 123, otrzymamy

$$49^{123} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10), \qquad 7^{246} \equiv (-1)^{123}(mod\ 10)$$

Skąd, wynika kongruencja

$$7^{246} \equiv -1(mod\ 10)$$

która oznacza, że liczba $7^{246} + 1$ jest podzielna przez 10.

1.5.3 Rozwiązywanie kongruencji liniowych

Ogólna postać kongruencji liniowej

$$a * x \equiv b(mod\ n)$$

w której w spółczynniki $a,\ b$ są liczbami całkowitymi, natomiast n jest liczbą naturalną.
Rozwiązać kongruencję liniową znaczy wyznaczyć wszystkie liczby całkowite, które podstawione na x spełniają kongruencje, to znaczy znaleść wszystkie wartości całkowite x dla których liczba $a * x$ przystaje do liczby b modulo n.
W pierwszej kolejności powstaje pytanie, podobnie jak w przypadku innych równań, ile rozwiązań ma kongruencja liniowa? Z góry można spodziewać się że kongruencja liniowa może mieć

- jedno rozwiązanie, to znaczy istnieje tylko jedna liczba całkowita x_0 przystająca do liczby b modulo n taka, że
$$a * x_0 \equiv b(mod\ n)$$
- więcej niż jedno rozwiązanie, to znaczy istnieje skończona lub nawet nieskończona ilość liczb całkowitych $x_1, x_2, ..., x_k, ...$; które są przystające do liczby b modulo n. To znaczy
$$a * x_k \equiv b(mod\ n), \qquad k = 1, 2, 3, ...;$$
- kongruencja nie ma rozwiązań.

Istnienie rozwiązania kongruencji liniowej wynika z następującego warunku koniecznego i wystarczającego:

Warunek konieczny i wystarczający
Kongruencja liniowa

$$a * x \equiv b(mod\ n)$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspólny dzielnik $NWD(a, n)$ liczb a i n jest dzielnikiem liczby b, to znaczy $NWD(a, b)|n$.
Po przeczytaniu powyższego wstępu o kongruencjach liniowych należy rozwiąwiązać kilka kongruencji, ażeby poznać sposoby ich rozwiązywania.

Przykład 1.20 *Rozwiąż kongruencje*

$$2 * x \equiv 3(mod\ 2)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji.
Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a, b) = NWD(2, 2) = 2$$

nie dzieli współczynnika

$$b = 3, \qquad 2 \dagger\ 3.$$

Zatem nie istnieje rozwiązanie tej kongruencji.

Przykład 1.21 *Rozwiąż kongruencje*

$$3 * x \equiv 6(mod\ 9)$$

Sprawdzamy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tej kongruencji. Największy wspólny dzielnik

$$NWD(a,b) = NWD(3,9) = 3$$

dzieli współczynnik

$$b = 6, \quad 3|6, \quad 6:3 = 2.$$

Zatem istnieje rozwiązanie tej kongruencji.
Z definicji kongruencji mamy równanie

$$3 * x - 6 = 9 * k,$$

dla wszystkich wartości calkowitych $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

Skąd obliczamy rozwiązanie

$$3 * x = 9 * k + 6, \quad x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

Sprawdzenie:

Podstwiając rozwiązanie

$$x_k = 3 * k + 2, \quad dla \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$$

do kongruencji

$$3 * x \equiv 6 (mod\ 9)$$

otrzymamy

$$3 * (3 * k + 2) \equiv 6 (mod\ 9),$$

Skąd wynika tożsamość

$$(9 * k + 6 - 6) : 9 = 9 * k, \quad 9 * k = 9 * k$$

dla każdej całkowitej wartości $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...;$

1.6 Rozwiązanie równania liniowego Diofantosa

Ogólna postać równań liniowych Diofantosa

$$a * x + b * y = c \tag{1.1}$$

gdzie współczynniki a, b, c są danymi liczbami całkowitymi, niewiadomych x i y również szukamy w liczbach całkowitych.

1.6.1 Rozszerzony algorytm Euklidesa.

Rozszerzony algorytm Euklidesa wyznaczania największego wspólnego dzielnika $NWD(a,b)$ prowadzi również do rozwiązania równania liniowego Diofantosa, jeżeli rozwiązanie tego równania istnieje.

Warunek istnienia rozwiązania równania liniowego Diofantosa.
Równanie liniowe Diofantosa o współczynnikach całkowitych a, b, c

$$a * x + b * y = c \tag{1.2}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy największy wspólny dzielnik $NWD(a,b)$ współczynników a i b jest również dzielnikiem współczynnika c.

Zauważamy, że jeżeli liczba d jest dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to rownież jest dzielnikiem ich sumy $r_0 + r_1$ i różnicy $r_0 - r_1$.
Wykonując dzielenie

$$\frac{r_0}{r_1} = k_0 + \frac{r_2}{r_1}$$

obliczamy resztę

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1.$$

Tutaj k_0 jest całością z dzielenia liczby naturalnej liczb r_0/r_1.
Teraz staje się jasne, że jeżeli liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb r_0 i r_1 to jest również dzielnikiem reszty r_2.

Kolejne reszty z dzielenia obliczamy według schematu tak długo aż kolejna obliczona reszta $r_m = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
a = r_0, \quad b = r_1 & | & reszta \\
-------- & & --- \\
\frac{r_0}{r_1} = k_0 + \frac{r_2}{r_1} & | & r_2 = r_0 - k_0 * r_1 \\
\frac{r_1}{r_2} = k_1 + \frac{r_3}{r_2} & | & r_3 = r_1 - k_1 * r_2 \\
\frac{r_2}{r_3} = k_2 + \frac{r_4}{r_3} & | & r_4 = r_2 - k_2 * r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{r_{m-2}}{r_{m-3}} = k_{m-2} + \frac{r_m}{r_{m-1}} & | & r_m = r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1} \\
\frac{r_{m-1}}{r_m} = k_{m-1} & | & r_{m+1} = 0
\end{array}$$

Ciąg reszt $r_0 > r_1 > r_2 \cdots > r_{m-1} > r_m$ jest malejący i kończy się na reszcie $r_m \neq 0$, gdyż następne reszty $r_{m+1} = 0,\ r_{m+2} = 0, ...;$ są równe zero.
Ostatnia reszta z dzielenia r_m różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0$ i $b = r_1$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik r_m liczb r_0 i r_1 jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt $r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_2, r_1, r_0$

Rozszerzony algorytm Euklidesa dotyczy rozwiniętej formy reszt, która prowadzi do rozwiązania równania Diofantosa. Mianowicie, ostatnia reszta różna od zera

$$r_m = NWD(a,b)$$

jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b.

Zauważmy, że reszty określone są wzorem rekurencyjnym z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned}
r_0 &= a, \quad r_1 = b, && \textit{warunki poczatkowe} \\
r_m &= r_{m-2} - k_{m-2} * r_{m-1}, && m = 2, 3, 4, ...;
\end{aligned}$$

Podstawiają $r_0 = a,\ \ r_1 = b$

do reszty

$$r_2 = r_0 - k_0 * r_1$$

otrzymamy resztę

$$r_2 = a - k_0 * b.$$

Podobnie podstawiając $r_1 = b, \ \ r_2 = a - k_1 * b$

do reszty

$$r_3 = r_1 - k_2 * r_2$$

otrzymamy resztę

$$r_4 = (1 + k_1 * k_2)a - (k_0 + k_2 + k_0 * k_1 * k_2)b.$$

w postaci lewej strony ròwnania Diofantosa o wspòłczynnikach a i b.

Dalej podstawiając na r_2 i r_3 prawe strony powyżyszych ròwności, po uporządtkowaniu wspòłczynnikòw przy a i b, otrzymamy resztę

$$r_5 = -(k_1 + k_3 + k_* k_2 * k_3)a + (1 + k_0 * k_1 + k_0 * k_3 + k) * k_1 * k_2 * k_3)b.$$

w postaci lewej strony ròwnania Diofantosa o wspòłczynnikach a i b.

Obliczanie następnych reszt $r_6, \ \ r_7, ...; r_m$ przez podstawianie wcześniej określonych reszt przez wspòłczynniki a i b prowadzi do wyrażenia reszty w postaci

$$r_m = a * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$

gdzie wielkości

$$w_1(k_0, k_1, k_2, ..., k_m)) \ \ i \ \ w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$

określone są przez dane wspòłczynniki a i b ròwnania Diofantosa.

Ponieważ największy wspòlny dzielnik $NWD(a, b) = r_m$ to zachodzi ròwność

$$a * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * w_2(k_0, k_1, ..., k_m) = NWD(a, b)$$

Mnożąc obie strony powyższej ròwności przez stałą

$$K = \frac{c}{NWD(a, b)}.$$

otrzymamy ròwność Diofantosa

$$a * K * w_1(k_0, k_1, ..., k_m) + b * K * w_2(k_0, k_1, ..., k_m) = c$$

z ktòrej wynika szczegòlne rozwiązanie ròwnania Diofantosa

$$x = K * w_1(k_0, k_1, ..., k_m), \quad y = K * w_2(k_0, k_1, ..., k_m)$$

Niżej podajemy tablicę wielkości w_1 i w_2 w przypadku $m = 2, 3, 4, 5$

m	$w_1(k_0, k_1, k_2, k_3)$	$w_2(k_0, k_1, k_2, k_3)$
2	1	$-k_0$
3	$-k_1$	$1 + k_1$
4	$1 + k_1 * k_2$	$-(k_0 + k2 + k + 0 * k_1 * k_2)$
5	$-(k_1 + k_3 + k_1 * k_2 * k_3)$	$1 + k_0 * k_1 + k_0 * k_3 + k_2 * k_3 + k_o * k_1 * k_2 * k_3$

Korzystają z systemòw obliczeniowych takich jak *Mathematica* [1] obliczamy największy wspòlny dzielnik jedną instrukcją

[1] Mathematica for doing Mathematics, by Stephen Wolfram

```
GCD[a,b]
```

Na przykład największy wspólny dzielnik liczb $a = 105$ i $b = 56$ obliczamy wykonując instrukcje w systemie *Mathematica*

```
GCD[105,56]
out        7
```

Podobnie można rozwiązać w systemie *Mathematica* jedną instukcją równanie liniowe Diofantosa

$$a * x + b * y = c$$

o współczynnikach całkowitych $a,\ b,\ c$.

```
ExtendedGCD[a,b]

out        { GCD[a,b],{x,y}}
```

Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 1.22 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$5 * x + 3 * y = 1$$

w systemie Mathematica

Rozwiązanie:

```
ExtendedGCD[5,3]

out              {1,{-1,2}}
```

Sprawdzenie rozwiązania $x = -1, \quad y = 2$

$$5 * (-1) + 3 * 2 = 1$$

1.7 Ćwiczenia

Stosowanie rozszerzonego algorytmu Euklidesa do rozwiązywania liniowych równań Diofantosa jest znacznie prostrze od jego ogólnego opisu. Niżej podajemy kilka przykładów zastosowania rozszerzonego algorytmu Euklidesa.

Przykład 1.23 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$2 * x + 3 * y = 4. \tag{1.3}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie łatwo określamy największy wspólny dzielnik współczynników $a = 2,\ b = 3$ i $c = 4$ równania liniowego Diofantosa. Mianowicie

$$NWD(2, 3) = 1$$

Również łatwo sprawdzymy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tego równania, gdyż największy wspólny dzielnik $NWD(2, 3) = 1$ dzieli współczynnik $c = 4$.

Zatem rozwiązanie rȯwniania (1.3) istnieje.
Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa zanajdziemy rozwiązanie rȯwnania liniowego (1.3).

Mianowicie, najpierw znajdź największy wspȯlny dzielnik liczb 2 i 3 według schematu

$$\begin{array}{ll} a = r_0 = 2, \;\; b = r_1 = 3 & | \;\; reszta \\ ----------- & ---------- \\ \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} & | \;\; r_2 = 3 - 1 * 2 = 1 \\ \frac{2}{1} = 2 & | \;\; r_3 = 0 \end{array}$$

Skąd piszemy największy wspȯlny dzielnik $N(2,3) = r_2 = 1$ w postaci rȯwności

$$3 - 2 * 1 = 1 \quad lub \quad 2 * (-1) + 3 * 1 = 1$$

Zauważamy, że tutaj

$$\begin{array}{ll} m = 2, & \\ k_0 = 1, & k_1 = 0, \\ w_1(k_0, k_1) = -1, & w_2(k_0, k_1) = 1, \\ K = 4 & \end{array}$$

Mnożąc powyższą rȯwność przez stałą $K = 4$, otrzymamy wyrażenie Diofantosa tego rȯwnania

$$2 * 4 * (-1) + 3 * 4 * 1 = 4$$

skąd wynika rozwiązanie szczegȯlne

$$x = 4 * (-1) = -4 \quad i \quad y = 4 * 1 = 4$$

Sprawdzenie:

$$2 * x + 3 * y = 2 * (-4) + 3 * 4 = 4$$

Przykład 1.24 *Rozwiąż rȯwnanie Diofantosa*

$$16 * x + 7 * y = 11. \tag{1.4}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie łatwo określamy największy wspȯlny dzielnik wspȯłczynnikȯw $a = 16,\ b = 7$ rȯwnania liniowego Diofantosa. Mianowicie

$$NWD(16, 7) = 1$$

Rȯwnież łatwo sprawdzymy warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania tego rȯwnania, gdyż największy wspȯlny dzielnik $NWD(16, 7) = 1$ dzieli wspȯłczynnik $c = 11$.
Zatem rozwiązanie rȯwniania (1.4) istnieje.
Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa zanajdziemy rozwiązanie rȯwnania liniowego (1.4).

Mianowicie, najpierw znajdź największy wspȯlny dzielnik liczb 16 i 7 według schematu

$$\begin{array}{ll}
a = r_0 = 16, \;\; b = r_1 = 7 & | \;\; reszta \\
----------- & \;\;\;---------- \\
\frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7} & | \;\; r_2 = 16 - 7 * 2 = 2 \\
\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{7} & | \;\; r_3 = 7 - 3 * 2 = 1 \\
\frac{2}{1} = 2 & | \;\; r_4 = 0.
\end{array}$$

Skąd piszemy największy wspólny dzielnik $N(16, 7) = r_3 = 1$ w postaci równości

$$r_3 = 7 - 3 * 2 = 1 \quad lub \quad r_3 = 7 * 1 - 3 * (16 - 7 * 2) = 1, \quad 16 * (-3) + 7 * 7 * 1 = 1$$

Zauważamy, że tutaj

$$\begin{array}{ll}
m = 3, & \\
k_0 = 2, & k_1 = 3, \;\; k_2 = 2 \\
w_1(k_0, k_1, k_2) = -3, & w_2(k_0, k_1, k_2) = 7, \\
K = 11 &
\end{array}$$

Mnożąc powyższą równość przez stałą $K = 11$, otrzymamy wyrażenie Diofatosa tego równania

$$16 * 11 * (-3) + 7 * 11 * 7 = 11$$

Skąd wynika rozwiązanie szczególne

$$x = 11 * (-3) = -33 \quad i \quad y = 11 * 7 = 77.$$

Sprawdzenie:

$$16 * x + 7 * y = 16 * (-33) + 7 * 77 = 11$$

Rozwiążmy następne równanie z większą ilością obliczanych reszt.

Przykład 1.25 *Rozwiąż równanie liniowe Diofantosa*

$$975 * x + 690 * y = 360 \tag{1.5}$$

Rozwiązanie:

Niżej znajdujemy największy wspólny dzielnik równania (1.5) stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, żeby znaleść rozwiązania równania (1.5). To równanie ma rozwiązanie, gdyż spełnia warunek konieczny i wystarczający. Mianowicie, największy wspólny dzielnik $NWD(975, 690) = 15$ dzieli współczynnik $c = 360$

$$\begin{array}{ll}
a = r_0 = 975, \; b = r_1 = 690 & | \;\; reszta \\
anie ----------- & \;\;\;---------- \\
\frac{975}{690} = 1 + \frac{285}{690} & | \;\; r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\
\frac{690}{285} = 2 + \frac{120}{285} & | \;\; r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\
\frac{285}{120} = 2 + \frac{45}{120} & | \;\; r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\
\frac{120}{45} = 2 + \frac{30}{45} & | \;\; r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\
\frac{45}{30} = 1 + \frac{15}{30} & | \;\; r_6 = 45 - 1 * 30 = 15
\end{array}$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $a = r_0 = 975$ i $b = r_1 = 690$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = NWD(975, 690) = 15$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15.$$

Dalej stosujemy roszerzenie algorytmu Euklidesa, żeby znaleść rozwiązanie równania (1.5). W tym celu zapiszemy resztę $r_6 = NWD(975, 690) = 15$ w postaci wyrażenia Diofantosa równania (1.5).

$$\begin{aligned} r_6 &= 45 - 1 * 30 \\ &= 45 - (120 - 2 * 45) \\ &= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * 120)) \\ &= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * (690 - 2 * 285))) \\ &= 45 - (120 - 2 * (285 - 2 * (690 - 2 * (975 - 1 * 690)))) \\ &= 975 * (17 * 24) + 690 * (-24 * 24) \end{aligned}$$

Wyrażenie Diofantosa równania (1.5) otrzymamy zbierając współczynników przy współczynnikach równania $a = 975$ i $b = 690$

$$975 * (408) + 690(-576) = 15$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez stałą

$$K = \frac{c}{NWD[a, b]} = \frac{360}{15} = 24$$

otrzymamy równość Diofantosa dla równania (1.5).
Skąd rozwiązanie szczególne równania (1.5)

$$x = w_1 = 408, \quad y = w_2 = -576.$$

Sprawdzenie:

$$975 * 408 - 690 * 576 = 360.$$

Przykład 1.26 *Rozwiąż równanie Diofatosa*

$$42 * x + 36 * y = 78 \tag{1.6}$$

Największy wspólny dzielnik $NWD(42, 78) = 6$ współczynników $a = 42$ i $c = 78$ dzieli współczynnik $b = 36$. Zatem rozwiązanie tego równania istnieje.

Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, obliczmy największy wspólny dzielnik liczb $a = 78$ i $b = 42$ i jednocześnie znajdziemy rozwiązanie równania (1.6). W liczbie $a = 78$ liczba

$b = 42$ miejści się raz i zostaje reszta 36.
Dalej wykonujemy dzielenia według schematu

$$\begin{array}{lcc} a = 78, \ \ b = 42 & | & reszta \\ - - - - - - - & & - - - \\ \frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{78} & | & 36 = 78 - 42 \\ \frac{42}{36} = 1 + \frac{6}{36} & | & 6 = 42 - 36 \\ \frac{36}{6} = 6 & | & 0 \end{array}$$

Rozwiązanie równania (1.6) otrzymamy wyrażając ostatnią resztę 6 przez reszty poprzednie.

Mianowucie, piszemy

$$6 = 42 - 36$$

Mnożąc obie strony przez $\frac{78}{6} = 13$ otrzymamy wyrażenie Diofantosa

$$42 * 13 - 36 * 13 = 6 * 13 = 78$$

Skąd otrzymamy rozwiązanie szczególne równnia (1.6)

$$x = w_1 = 13, \ \ |; \ y = w_2 = -13.$$

Sprawdzenie:

Podstawiając do równaia (1.6) $x = 13, \ \ y = -13$, otrzymamy równość

$$42 * 13 - 36 * 13 = 78$$

1.8 Zadania

Zadanie 1.7 *Oblicz*

(i) $8 + 10(mod\ 4) =$

(ii) $2 + 5(mod\ 7) =$

(iii) $12(mod\ 7) + 13(mod\ 8) =$

Zadanie 1.8 *Dodaj, odejmij i pomnóż stronami kongruencje. Sprawdź wyniki tych operacji.*

$$18 \equiv 10(mod\ 4)$$

oraz

$$25 \equiv 17(mod\ 4)$$

Zadanie 1.9 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $a = 105$ *i* $b = 91$

Zadanie 1.10 *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $a = 1995$ *i* $b = 1190$

Zadanie 1.11 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$25 * x + 12 * y = 1$$

Zadanie 1.12 *Rozwiąż równanie Diofantosa*

$$5 * x - 3 * y = 9$$