

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Dwumian Newtona

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{cccccccc}
 (a + b)^0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & \\
 (a + b)^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 (a + b)^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 (a + b)^3 & \cdots & \cdots & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} &
 \end{array}$$

DWUMIAN NEWTONA
TRÓJKĄT PASCALA

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

Contents

1	Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona	5
1.1	Wzory uproszczonego mnożenia	6
1.1.1	Ćwiczenia	8
1.2	Dwumian Newtona (1642-1727).	9
1.3	Trójkąt Pascala (1623-1662).	10

Chapter 1

Wzory uproszczonego mnożenia i dwumian Newtona

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.

Dla przykładu wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll} 125 & 247, \quad \text{jedna liczba jest jednomianem} \\ 2 * 5 * 7, & 3 * 4 * 5 * 6 * 7, \\ 3 * a * b & a * b * c, \\ 4 * 5 * x * y * z, & 5 * a^2 * b^3 * c^4, \\ 15 * x^3 * y^2 * z^3 & 7 * 9 * a^4 * b^5 * x^6 * y^7. \end{array}$$

Jasne, że każdy jednomian jest szczególnej postaci wyrażeniem arytmetycznym, jeżeli zawiera tylko liczby lub jest szczególnym wyrażeniem algebraicznym, jeżeli zawiera litery lub liczby i litery. Szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż tylko operacja mnożenia występuje w ich określeniu.

Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.

Na przykład

$$a + b, \quad a - b, \quad a^2 + b^2, \quad 3x^3 + 5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.

Na przykład

$$\begin{array}{ll} a + b + c, & 2 * x_3 + 4 * y^3 + 5 * x * y, \\ a^2 + 2 * a * b + b^2, & x^2 - 2 * x * y + y^2. \end{array}$$

Ogólnie wielomianem nazywamy sumę wielu jednomianów.

Natomiast, wielomianem stopnia n nazywamy sumę jednomianów następującej postaci:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3 + \dots + a_{n-1} * x^{n-1} + a_n * x^n$$

Wyrazy wielomianu piszmy również w odwrotnej kolejności pomijając znak mnożenia $*$.

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

1.1 Wzory uproszczonego mnożenia

1. Dwumian, dwumian kwadratowy i trójmian kubiczny. Łatwo sprawdzamy następujące tożsamości ¹

$$\begin{aligned} (a \pm b)^1 &= a \pm b, && \text{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2 a b + b^2, && \text{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 &= a^3 - 3 a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, && \text{trójmian kubiczny } n = 3 \end{aligned}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.

Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a(a - b) - b(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

2.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześciąt sumy lub różnicy.

¹Tożsamość nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów

Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 \\
 &= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\
 &= (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (ba^2 + 2ab^2 + b^3) \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
 (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 = a(a-b)^2 - b(a-b)^2 \\
 &= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= (a^3 - 2a^2b + ab^2) - (ba^2 - 2ab^2 + b^3) \\
 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,
 \end{aligned}$$

3. Suma kwadratów.

Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero. Mianowicie, piszemy

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &> 0, & \text{gdy } a \neq 0 \text{ lub } b \neq 0, \\
 a^2 + b^2 &= 0, & \text{gdy } a = 0 \text{ i } b = 0.
 \end{aligned}$$

4. Różnica kwadratów.

Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = (a^2 + ab) - (ba + b^2) = a^2 - b^2.$$

5. Suma sześciątów.

Suma sześciątów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\
 &= (a^3 - a^2b + ab^2) + (ba^2 - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3.
 \end{aligned}$$

6. Różnica sześciątów.

Różnica sześciątów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a^3 + a^2b + ab^2) - (ba^2 + ab^2 + b^3) = a^3 - b^3. \end{aligned}$$

1.1.1 Ćwiczenia

Przykład 1.1 Wykonaj działanie

$$\begin{aligned} (i) \quad (2a + 3)^2, & \quad (ii) \quad \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2, \\ (ii) \quad (3a + 2)^3, & \quad (iv) \quad (2x - 3y)^3, \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy

$$ad.(i) \quad (2a + 3)^2 = (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9.$$

$$\begin{aligned} sd.(ii) \quad \left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right)(-4) + (-4)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iii) \quad (3a + 2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 \cdot 2 + 3(3a) \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iv) \quad (2x - 3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3. \end{aligned}$$

Zadanie 1.1 Wykonaj działania

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{(5a + 2)^2}{(2a - 3)^2}, & \quad (ii) \quad \left(\frac{x^2}{3} - 1\right)^2, \\ (ii) \quad (3a + 2)^3, & \quad (iv) \quad \left(\frac{3x - 2y}{2x + 3y}\right)^3, \end{aligned}$$

Zadanie 1.2 Uprość wyrażenie

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{(a^2 + b^2)(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{[(a + b)^2 + (a - b)^2](a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)} \\ (ii) \quad & \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x^2} \end{aligned}$$

1.2 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym jest *Dwumian Newtona*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \quad (1.1)$$

lub w Σ (sigma) notacji

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.2)$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b, & n = 1 \\ (a+b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2, & n = 2 \\ (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3, & n = 3 \\ (a+b)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4, & n = 4 \\ (a+b)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5, & n = 5 \end{aligned}$$

Napiszmy kilka własności symbolu Newtona $\binom{n}{k}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2. Symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Sprawdzamy

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Sprawdzamy

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\ \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{aligned}$$

które podane są niżej w tabeli

$(a+b)^0$	1				
$(a+b)^1$	1	1				
$(a+b)^2$	1	2	1				
$(a+b)^3$	1	3	3	1				
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1			
$(a+b)^5$...	1	5	10	10	5	1			
$(a+b)^6$...	1	6	15	20	15	6	1		
$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1		
...

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszy równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tabelę wartości współczynników Newtona w n -tym wierszu tworzymy stosując własność 3, to jest wzór.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n-1$ obliczmy wartości w wierszu n

$$\begin{aligned} n=1, \quad k=0, \quad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= 1+1=2 = \binom{2}{1} \\ n=2, \quad k=0, \quad \binom{2}{0} + \binom{2}{1} &= 1+2=3 = \binom{3}{1} \\ n=2, \quad k=1, \quad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} &= 2+1=3 = \binom{3}{2} \\ n=3, \quad k=0, \quad \binom{3}{0} + \binom{3}{1} &= 1+3=4 = \binom{4}{1} \\ n=3, \quad k=1, \quad \binom{3}{1} + \binom{3}{2} &= 3+3=6 = \binom{4}{2} \\ n=3, \quad k=2, \quad \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 3+1=4 = \binom{4}{3} \end{aligned}$$