MATEMATYKA W SZKOLE HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
UL. BAŻANCIA 16

TEMAT: TWORZENIE SYSTEMÓW LICZBOWYCH
SYSTEMY POZYCYJNE
DECYMALNY BINARNY OKTALNY

Warszawa październík 2017

Contents

0.1 Wstęp

Projekt ten jest opracowany dla rozszerzonego programu matematyki w Szkole Podstawowej Heliantus i dotyczy arytmetyki liczb naturalnych i tworzenia systemȯw liczbowych pozycyjnych o rȯżnych podstawach.
Systemy liczbowe dziesiętny, binarny, oktalny i wiele innych systemȯw liczbowych są możliwe do tworzenia na zasadzie ogȯlnej postaci wielomianu o ustalonej podstawie systemu $\rho \geq 2$. (zobacz wzȯr (1)).
W tym projekcie systemy dziesiętny, binarny i oktalny podane są jako przykłady systemȯw liczbowych zbudowanych na zasadzie wielomianu. Do opisu każdego z tych systemȯw dołączone są ċwiczenia z zadaniami.
Tadeusz STYṠ. Warszawa, wrzesień 22, 2017

0.2 Ogólna zasada tworzenia systemów liczbowych

Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego. Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z których tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, który jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynników wielomianu (1).

0.3 Przykłady zapisu liczb w różnych systemach

Przykład 0.1 *W systemie dziesiętnym $\rho = 10$. Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 0.2 *W systemie binarnym $\rho = 2$. Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (10000)_2$

Przykład 0.3 *W systemie oktalnym $\rho = 8$. Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

Chapter 1

System dziesiętny. Decymalny

W systemie dziesiętnym podstawa $\rho = 10$. Wtedy dla $\rho = 10$ wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0$$

Współczynniki tego wyrażenia są cyframi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, gdzie
α_0 oznacza ilość jedności liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^0 = 10^0$.
α_1 oznacza ilość dziesiątek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^1 = 10$.
α_2 oznacza ilość setek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^2 = 10^2$.
α_3 oznacza ilość tysięcy liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^3 = 10^3$.
....
α_{n-1} oznacza współczynnik przy potędze $\rho^{n-1} = 10^{n-1}$.
Najbardziej znacząca cyfra jest zawsze większa lub równa 1, $\alpha_{n-1} \geq 1$.
Cyfry systemu dziesiętnego

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

są jednocześnie liczbami jednocyfrowymi
Liczby dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 10 + a_0 = a_1 a_0$$

gdzie cyfrą dziesiątek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 1.1 *Liczba* $\quad x = 57$

*5*10+7= 57*

Tytaj cyfra dziesiątek $a_1 = 5$, *cyfra jedności* $a_0 = 7$.

Liczby trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 = a_2 a_1 a_0$$

lub w zapisie potęgi podstawy 10, piszemy

$$100 = 10 * 10 = 10^2, \quad 10^1 = 10, \quad 10^0 = 1$$

wtedy liczba trzycyfrowa ma ogólną postać

$$a_2 * 10^2 + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 = a_2a_1a_0$$

Przykład 1.2 $x = 348$

$$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 8 * 10^0 = 348$$

gdzie cyfra setek $a_2 = 3$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 4$, *cyfra jedności* $a_0 = 8$.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie dziesiętnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

gdzie potęga podstawy 10

$$\begin{aligned}
10^1 &= \underbrace{10}_{1} \\
10^2 &= \underbrace{10 * 10}_{2} \\
10^3 &= \underbrace{10 * 10 * 10}_{3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10^{n-3} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-3} \\
10^{n-2} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-2} \\
10^{n-1} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-1}
\end{aligned}$$

oznacza liczbę 10 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 10 pomnożona przez siebie zero razy $10^0 = 1$.

Przykład 1.3 *Niech* $n = 4$, *wtedy liczbę czterocyfrowa x=7831.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$7 * 1000 + 8 * 100 + 3 * 10 + 1 = 7831$$

lub w symbolach potegi $1000 = 10 * 10 * 10 = 10^3$, $100 = 10 * 10 = 10^2$, $10 = 10^1$, $10^0 = 1$

$$7 * 10^3 + 8 * 10^2 + 3 * 10^1 + 1 = 7831$$

gdzie cyfra tysięcy $a_3 = 7$, *cyfra setek* $a_2 = 8$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 3$, *cyfra jedności* $a_0 = 1$.

1.1 Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym

Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym wykonujemy w kolejności:
mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie.
Ten porządek wykonywania operacji arytmetycznych może byċ zmieniony przez nawiasy.

1.1.1 Dodawanie

Tabliczka dziesiętnego dodawania

	Dodawanie				dziesiętne					
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Dodawanie dziesiętne pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.4 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ + & 13 \\ & -- \\ & 38 \end{array}$$

Przykład 1.5 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 89 *i* 56

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 89 \\ + & 56 \\ & -- \\ & 145 \end{array}$$

1.1.2 Odejmowanie

Tabliczka dziesiętnego odejmowania

	Odejmowanie				dziesiętne					
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.6 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 29 *i* 18

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $29 - 18$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$
\begin{array}{rr}
 & 29 \\
- & 18 \\
 & -- \\
 & 11
\end{array}
$$

Przykład 1.7 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 629 *i* 354

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $629 - 354$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$
\begin{array}{rr}
 & 629 \\
- & 354 \\
 & -- \\
 & 275
\end{array}
$$

1.1.3 Mnożenie

Tabliczka mnożenia

	Mnożenie				dziesiętne					
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Mnożenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.8 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 49 *i* 15

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $49 * 15$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 49 \\ *\ 15 \\ ---\\ 245 \\ 49\ \\ --- \\ 735 \end{array}$$

Przykład 1.9 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *i* 123

Wykonujemy pisemne mnożenie $345 * 123$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 345 \\ *\ 123 \\ --- \\ 1035 \\ 690\ \\ 345\ \ \\ --- \\ 42435 \end{array}$$

1.1.4 Dzielenie

Dzielenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.10 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *podziel przez* 5

Wykonujemy pisemne dzielenie 345 : 5.

$$\begin{array}{l} \ \ 69 \\ ---\\ \ 345 : 5 \\ -30 \\ -- \\ \ \ 45 \\ \ \ 45 \\ --- \\ \ \ = \end{array}$$

Przykład 1.11 *Wykonaj pisemne dzielenie liczb dziesiętnych* 1659 *przez* 21

Wykonujemy pisemne dzielenie 1659 : 21.

$$\begin{array}{l} \ \ 79 \\ ---\\ \ 1659 : 21 \\ -147 \\ -- \\ \ \ 189 \\ \ \ 189 \\ ---- \\ \ \ = \end{array}$$

1.2 Liczby parzyste

Własności liczb parzystych:

1. Liczby parzyste mają cyfry jedności 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8. Na przkład liczby
$$120,\ 132,\ 134,\ 156,\ 178$$
mają odpowiednio cyfry jedności
$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$

2. Liczby parzyste są podzielne przez 2, zatem mają ogólną postać
$$n = 2 * k, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
Na przykład
$$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\ k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\ .... & ..... \\ k = 8, & n = 2 * 8 = 16, \\ k = 26, & n = 2 * 26 = 52. \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb parzystych jest liczbą parzystą
   Na przykład:
$$a = 8, \quad b = 6,$$
$$a + b = 8 + 6 = 14, \quad a - b = 8 - 6 = 2, \quad a * b = 8 * 6 = 48$$

1.3 Liczby nieparzyste

Własności liczb nieparzystych:

1. Liczby nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9.
   Na przkład liczby
$$121, \ 133, \ 135, \ 157, \ 179$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9$$

2. Liczby nieparzyste mają ogólną postać
$$n = 2 * k + 1, \quad \text{lub} \ \ n = 2 * k - 1, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
   Na przykład
$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ .... & ..... & & \\ k = 8, & n = 2 * 8 + 1 = 17, & lub & n = 2 * 8 - 1 = 15 \\ k = 26, & n = 2 * 26 + 1 = 53 & lub & n = 2 * 26 - 1 = 51 \\ . & & & \end{array}$$

3. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:
$$5 * 7 = 35, \quad 7 * 11 = 77, \quad 9 * 15 = 105$$

4. Suma lub różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Podaj przykład.

5. Natomiast suma lub różnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzysta. Podaj przykład.

1.4 Ćwiczenia

Zadanie 1.1 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n+1,\quad 2n+3,\quad 2n+5.$$

Ich suma
$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=51$$

Obliczamy n:

$$6n+9=51,\quad 6n=42,\quad n=42:6=7$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$2n+1=2*7+1=15,\quad 2n+3=2*7+3=17,\quad 2n+5=2*7+5=19.$$

Sprawdzenie:
$$15+17+19=51$$

Zadanie 1.2 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 200. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-4,\quad 2n-2,\quad 2n,\quad 2n+2,\quad 2n+4.$$

Ich suma

$$(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2+(2n+4)=10n=200$$

Obliczamy n:

$$10n=200,\quad n=200:10=20$$

Obliczmy pięć kolejnych liczb parzystych

$$2n-4=2*20-4=36,\quad 2n-2=2*20-2=38,\quad 2n=2*20=40,$$
$$2n+2=2*20+2=42,\quad 2n+4=2*20+4=44.$$

Sprawdzenie:
$$36+38+40+42+44=200.$$

Zadanie 1.3 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 160. Znajdz te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne cztery liczby nieparzyste to

$$2n-3,\quad 2n-1,\quad 2n+1\quad 2n+3.$$

Ich suma

$$(2n-3)+(2n-3)+(2n+1)+(2n+3)=8n=160$$

Obliczamy n:

$$8n=160, \quad \text{to} \quad n=160:8=20$$

Obliczmy cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2n-3=2*20-3=37, \quad 2n-1=2*20-1=39,$$

$$2n+1=2*20+1=41, \quad 2n+3=2*20+3=43.$$

Sprawdzenie:

$$37+39+41+43=160$$

Zadanie 1.4 *Oblicz sumę*

$$S_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\
S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\
--- & ... & -------------------- \\
2*S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

$$S_{10}=10*11:2=55$$

Zadanie 1.5 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n=1+2+3+\cdots+n$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_n & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\
S_n & = & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\
--- & ... & -------------------- \\
2*S_n & = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

Zadanie 1.6 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości

$$\begin{array}{ccc}
S_{20} & = & 2 + 4 + +6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\
S_{20} & = & 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\
--- & ... & ----------------------- \\
2 * S_{20} & = & \underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22}_{10\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20}

$$S_{20} = 10 * 22 : 2 = 110 \quad \text{lub} \ \ \mathrm{S}_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 110$$

Zadanie 1.7 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystch*

$$S_n = 2 + 4 + \cdots + (2n - 2) + 2n$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości

$$\begin{array}{cccccccc}
S_{2n} & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots + & 2n - 2+ & 2n \\
S_{2n} & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots + & 4+ & 2 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2 * S_{2n} & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots + & (2n+2)+ & (2n+2) \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n}.

$$S_{2n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{20}

$$S_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 10 * 11 = 110$$

Zadanie 1.8 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{19} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami:

$$\begin{array}{ccc}
S_{19} & = & 1 \;\; + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\
S_{19} & = & 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\
--- & ... & ------------------- \\
2 * S_{19} & = & \underbrace{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}_{10 \; skladnikow \; sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{19} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{19} = 10 * 20 : 2 = 100 \quad \text{lub} \;\; \mathrm{S}_{19} = \frac{10 * 20}{2} = 100$$

Zadanie 1.9 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystch*

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

Podaj przkład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc}
S_{2n-1} & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots + & (2n-3)+ & (2n-1) \\
S_{2n-1} & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots + & 3+ & 1 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2 * S_{2n-1} & = & 2n+ & 2n+ & 2n+ & \cdots + & 2n+ & 2n \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n \; skladnikow \; sumy}}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n-1}.

$$S_{2n-1} = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{19}

$$S_{19} = 10 * 10 = 100$$

Zadanie 1.10 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1$$

jest podzielne przez 12 *dla każdej nieparzystej liczby* a.

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2 * n - 1$$

gdyż dla każdej liczby nieprazystej jest naturalne n, takie że

$$a = 2 * n - 1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2 * n - 1$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
&a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1 = \\
&= (2*n-1)(2*n-1) + (2*n-1+2)(2*n-1+2) + (2*n-1+4)(2*n-1+4) + 1 = \\
&= (4*n*n - 4*n + 1) + (2*n + 1(2*n+1) + (2*n+3)(2*n+3) + 1 = \\
&= (4*n^2 - 4*n + 1) + (4*n^2 + 4*n + 1) + (4*n^2 + 12*n + 9) = \\
&= 12*n^2 + 12*n + 12 = \\
&= 12*(n^2 + n + 1)
\end{aligned}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2*n-1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy (n^2+n+1). Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a.

Zadanie 1.11 *Ile różnych liczb parzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby parzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają trzy cyfry jedności
2 lub 4 lub 6
Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności
2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 2

112	212	312	412	512	612	712
122	222	322	422	522	622	722
132	232	332	432	532	632	732
142	242	342	442	542	642	742
152	252	352	452	552	652	752
162	262	362	462	562	662	762
172	172	372	472	572	672	772

Niżej podadane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 4

114	214	314	414	514	614	714
124	224	324	424	524	624	724
134	234	334	434	534	634	734
144	244	344	444	544	644	744
154	254	354	454	554	654	754
164	264	364	464	564	664	764
174	174	374	474	574	674	774

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 6

116	216	316	416	516	616	716
126	226	326	426	526	626	726
136	236	336	436	536	636	736
146	246	346	446	546	646	746
156	256	356	456	556	656	756
166	266	366	466	566	666	766
176	176	376	476	576	676	776

Teraz liczymy wszystkie liczby parzyste utworzone z cyfr 1,2,3,4,5,6,7.
W tabeli pierwszej z cyfrą jedności 2 jest ich 7*7=49
Podobnie, w tabeli drugiej z cyfrą jedności 4 jest ich 7*7=49
oraz w tabeli trzeciej z cyfrą jedności 6 jest ich 7*7=49
Zatem w razem w trzech tabelach jest rżnych liczb parzystych

$$7 * 7 * 3 = 49 * 3 = 147$$

Zadanie 1.12 *Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby nieparzyste utworzone z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ mają cztery cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7
Napiszmy wszystkie różne liczby nieparzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę

jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7

11	13	15	17
21	23	25	27
31	33	35	37
41	43	45	47
51	53	55	57
61	63	65	67
71	73	75	77

Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 0.2 tworzymy cztery tablice dla liczby z cyfrą jedności $1, 3, 5, 7$. Każda z czterech tablic zawiera 7*7=49 liczb nieparzystych. Ilość liczb nieparzstych utworzonych z cyfr $1, , 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jest

$$4 * 49 = 196$$

1.5 Zadania

Zadanie 1.13 *Wykonaj dodawanie pisemne liczb dziesiętnych* 1659 *i* 421

Zadanie 1.14 *Wykonaj odejmowanie pisemne liczb* $1659 - 421$

Zadanie 1.15 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* $345 * 21$

Zadanie 1.16 *Wykonaj dzelenie pisemne liczb dziesiętnych* 1722 *przez* 21

Zadanie 1.17 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdz te liczby.*

Zadanie 1.18 *Ile róznych liczb dwucyfrowych parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 ??*

Zadanie 1.19 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdz te liczby.*

Zadanie 1.20 *Ile różnych liczb trzycyfrowych nieparzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 ??*

Zadanie 1.21 *Oblicz sumę*

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.22 *Podaj wór ogólny na sumę* n *kolejnych liczb naturalnych.*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 1.23 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

używając tylko jednej operacji mnożenia.

Zadanie 1.24 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystych*

$$S_{2n} = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 1.25 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{10} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

używając tylko jednej operacji mnożenia.

Zadanie 1.26 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{2n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + 2n + 1$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Zadanie 1.27 *Udowodnij, ze wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a + 2)(a + 2) + (a + 4)(a + 4) + 1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby naturalnej i nieparzystej a.

Zadanie 1.28 *Pomiędzy cyfry liczby 18519 wstaw cyfre 2, żeby otrzymać*

(a) liczbę największą

(b) liczbę najmiejszą

Zadanie 1.29 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdz te liczby.*

Zadanie 1.30 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 1.31 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 180. Znajdz te liczby.*

Zadanie 1.32 *Oblicz sumę*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.33 *Oblicz sumę*

$$S_{16} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$$

używając jednei operacji mnożenia.

Zadanie 1.34 *Oblicz sumę*

$$S_{21} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$$

używając jednej opercji mnożenia.

Zadanie 1.35 .

(a) *Oblicz sumę 20-stu wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.$$

(b) *Podaj wzór ogólny na sumę n-wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots, 3n.$$

(c) *Stosując ten wzór oblicz sumę 15-stu wyrazów tego ciągu.*

Zadanie 1.36 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$(a + 1)(a + 1) + 4$$

jest podzielne przez 4 *dla każdej liczby parzystej* a.

Chapter 2

System dwòjkowy. Binarny

W systemie pozycyjnym binarnym podstawa $\rho = 2$. Wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_2$$

Wtedy mamy tylko dwie cyfry $0, 1$ a współczynniki

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$$

przyjmuj wartoci 0 lub 1.
Na przykład, liczba binarna czterocyfrowa

$$x = \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = 1010$$

ma
ilość jedności $2^0 = 1,\ \alpha_0 = 0,$
ilość dwòjek $2^1,\ \alpha_1 = 1,$
ilość kwadratòw dwòjek $2^2,\ \alpha_2 = 1$
ilość kubikòw dwòjek $2^3,\ \alpha_3 = 1.$
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie binarnym podstawą jest liczba 2. W binarnym systemie jest dwie cyfry

$$0, 1,$$

ktòre są jednocześnie liczbami jednocyfowymi binarnymi.
Liczby binarne dwucyfrowe piszemy w ogòlnej postaci

$$a_1 * 2 + a_0 = (a_1a_0)_2$$

gdzie cyfrą dwòjek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 2.1 *Liczba binarna* $x = (11)_2$

$$1 * 2 + 1 = (11)_2.$$

Tytaj cyfrą dwójek jest współczynnik $a_1 = 1$, *cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 1$. *Wartość tej liczby binarnej w zapisie dziesiętnym jest równa* 3.

Liczby binarne trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi dwójki

$$2 * 2 = 2^2, \;\; 2^1 = 2, \;\; 2^0 = 1.$$

Przykład 2.2 *Na przykład liczbę binarną* $x = (101)_2$ *w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 2^2 + a_1 * 2^1 + a_0 * 2^0 = (a_2 a_1 a_0)_2,$$

$$1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (101)_2,$$

gdzie cyfra binarna $a_2 = 1$ *jest wpółczynnikiem przy* 2^2,
cyfra binarna $a_1 = 0$ *jest wpółczynnikiem przy* 2,
cyfra binarna jedności $a_0 = 1$.
Wartość tej liczby binarnej

$$(101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5$$

w zapisie dziesiętnym jest równa 5.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie binarnym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + a_{n-3}2^{n-3} + \cdots + a_1 2 + a_0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi podstawy 2 są:

$$2^1 = \underbrace{2}_{1}$$

$$2^2 = \underbrace{2 * 2}_{2}$$

$$2^3 = \underbrace{2 * 2 * 2}_{3}$$

....

....

$$2^{n-3} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-3}$$

$$2^{n-2} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-2}$$

$$2^{n-1} = \underbrace{2 * 2 * 2 * ... * 2}_{n-1}$$

Tutaj 2^1, 2^2, 2^3 , , , 2^{n-1} oznacza liczbę 2 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 2 pomnożona przez siebie zero razy $2^0 = 1$.

Przykład 2.3 *Niech $n = 5$, wtedy liczbę binarną pięciocyfrową $x = (10101)_2$. piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = (10101)_2$$

gdzie wpsółczynnik przy 2^4 jest równy $a_4 = 1$,
wpsółczynnik przy 2^3 jest równy $a_3 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^2 jest równy $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 2^1 jest równy $a_1 = 0$,
i wpsółczynnik jedności binarnych, przy 2^0 jest równy $a_0 = 1$.

2.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby binarnym

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę binarną. To przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 2 i zapisujemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 2 i zapisujemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 2 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 2 otrzymamy część całkowitą równą 0. Liczbę binarną otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynają od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze binarnej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na binarne na przykładach.

Przykład 2.4 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 9$ na liczbę binarną*
Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 9$ przez 2

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2} &= 4 + \tfrac{1}{2} \quad && reszta\; r_0 = 1 \quad bo \quad 9 = 2 * 4 + 1 \\
\frac{4}{2} &= 2 && reszta\; r_1 = 0 \quad bo \quad 4 = 2 * 2 + 0 \\
\frac{2}{2} &= 1 && reszta\; r_2 = 0 \quad bo \quad 2 = 2 * 1 + 0 \\
\frac{1}{2} &= 0 + \tfrac{1}{2} && reszta\; r_3 = 1 \quad bo \quad 1 = 2 * 0 + 1
\end{aligned}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1001)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 9 *przez* 2 *według innego stosowanego schematu*

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez* 2
======	=================
$9/2 = 4$	1
$4/2 = 2$	0
$2/2 = 1$	0
$1/2 = 0$	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1001)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1001)_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 1 = 9.$$

Przykład 2.5 *Przelicz liczbę dziesiętną* $x = 15$ *na liczbę binarną*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 15$ przez 2

$$\begin{array}{lll}
\frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2} & \textit{reszta } r_0 = 1 & \textit{bo} \quad 15 = 2 * 7 + 1 \\
\frac{7}{2} = 3 & \textit{reszta } r_1 = 1 & \textit{bo} \quad 7 = 2 * 3 + 1 \\
\frac{3}{2} = 1 & \textit{reszta } r_2 = 1 & \textit{bo} \quad 2 = 2 * 1 + 1 \\
\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} & \textit{reszta } r_3 = 1 & \textit{bo} \quad 1 = 2 * 0 + 1
\end{array}$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę binarną

$$(r_3 r_2 r_1 r_0)_2 = (1111)_2$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 15 przez 2 według stosowanego innego schematu

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez* 2
======	=================
$15/2 = 7$	1
$7/2 = 3$	1
$3/2 = 1$	1
$1/2 = 0$	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$(1111)_2$$

Sprawdzenie:

$$(1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$$

2.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na binarny

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 2.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 2
Ogólnie

$$\frac{k_i}{2} = k_{i+1} + \frac{r_{i+1}}{2}, \quad k_i = 2 * k_{i+1} + r_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., m.$$

gdzie k_{i+1} to całość i r_{i+1} to reszta z dzielenia k_i przez 2 dla $i = 0, 1, 2, ..., m$

2.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/2 = k_0 + r_0/2$	r_0
$k_0/2 = k_1 + r_1/2$	r_1
$k_1/2 = k_2 + r_2/2$	r_2
$k_2/2 = k_3 + r_3/2$	r_3
$\cdots$	$\cdots$
$k_{m-2}/2 = k_{m-1} + r_{m-1}/2$	r_{m-1}
$k_{m-1}/2 = 0 + r_m/2$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_2$$

2.4 Dowód Alegorytmu

[1] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę binarną.

[1] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

Z tego algorytmu znajdujemy

$$
\begin{array}{rcll}
x & = & 2k_0 + r_0 & | \;\; k_0 = 2k_1 + r_1 \\
 & = & 2^3k_2 + 2^2r_2 + 2r_1 + r_0 & | \;\; k_2 = 2k_3 + r_3 \\
 & = & 2^4k_3 + 2^3r_3 + 2^2r_2 + 2r_1 + r_0 & | \;\; k_3 = 2k_4 + r_4 \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & | \;\; \cdots\cdots\cdots \\
 & = & 2^{m-1}k_{m-2} + 2^{m-2}r_{m-2} + \cdots + 2^2r_2 + 2r_1 + r_0 & | \;\; k_{m-2} = 2k_{m-1} + r_{m-1} \\
 & = & 2^mk_m + 2^{m-1}r_{m-1} + \cdots + 2^2r_2 + 2r_1 + r_0 & | \;\; k_{m-1} = 2k_m + r_m \\
 & = & 2^mr_m + 2^{m-1}r_{m-1} + \cdots + 2^2r_2 + 2r_1 + r_0 & | \;\; k_m = r_m \\
 & = & (r_mr_{m-1}r_{m-2}...r_2r_1r_0)_2 & |
\end{array}
$$

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na binarną.

Liczba $x/2$	*Reszta z dzielenia przez* 2
$256/2 = 128$	0
$128/2 = 64$	0
$64/2 = 32$	0
$32/2 = 16$	0
$16/2 = 8$	0
$8/2 = 4$	0
$4/2 = 2$	0
$2/2 = 1$	0
$1/2 = 0$	1

W wyniku otrzymujemy liczbę binarną pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (100000000)_2$$

Sprawdzenie:

$$(100000000)_2 = 1*2^8+0*2^7+0*2^6+0*2^5+0*2^4+0*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0 = 256.$$

2.5 Operacje arytmetyczne w systemie binarnym

Operacje arytmetyczne w systemie binarnym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposób jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Natomiast w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych) $0, 1$.

2.5.1 Binarne dodawanie

Tabliczka binarnego dodawania

+	0	1
0	0	1
1	1	$(10)_2$

Binarna suma

$$\begin{aligned}
&0+0=0\\
&0+1=1\\
&1+0=1\\
&1+1=(10)_2=1*2^1+0*2^0
\end{aligned}$$

Dodawanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 2.6 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5=(101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3=(11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie $101+11$, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr}
 & 101\\
+ & 11\\
 & ---\\
 & 1000
\end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5+3=(101)_2+(11)_2=(1000)_2=1*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0=8.$$

Przykład 2.7 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5=(101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3=(11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dodawanie $101+11$, stosując tabliczkę binarnego dodawania.

$$\begin{array}{cr}
 & 101\\
+ & 11\\
 & ---\\
 & 1000
\end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5+3=(101)_2+(11)_2=(1000)_2=1*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0=8.$$

2.5.2 Binarne odejmowanie

Tabliczka binarnego odejmowania

-	0	1
1	0	-1
1	1	0

Binarna różnica

$$\begin{aligned}
0-0&=0\\
0-1&=-1\\
1-0&=1\\
1-1&=0
\end{aligned}$$

Odejmowanie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 2.8 *Wykonaj dodawanie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = 101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne odejmowanie $(101)_2 - (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego odejmowania.

$$\begin{array}{cr}
 & 101\\
- & 11\\
 & ---\\
 & 10
\end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5-3 = (101)_2 - (11)_2 = (10)_2 = 1*2^1 + 0*2^0 = 2.$$

2.5.3 Binarne mnożenie

Tabliczka binarnego mnożenia

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Binarny iloczyn

$$\begin{aligned}
0*0&=0\\
0*1&=0\\
1*0&=0\\
1*1&=1
\end{aligned}$$

Mnożenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 2.9 *Wykonaj mnożenie binarne liczb dziesiętnych* 5 *i* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $5 = (101)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(101)_2 * (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{r} 101 \\ * \quad 11 \\ ---\\ 101 \\ 101 \\ --- \\ 1111 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 * 3 = (101)_2 * (11)_2 = (1111)_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 15.$$

2.5.4 Binarne dzielenie

Dzielenie binarne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 2.10 *Wykonaj dzielenie binarne liczb dziesiętnych* 15 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 5 w zapisie binarnym $15 = (1111)_2$, liczba dziesiętna 3 w zapisie binarnym $3 = (11)_2$.
Wykonujemy pisemne binarne dzielenie $(101)_2 : (11)_2$, stosując tabliczkę binarnego dzielenia i dodawania.

$$\begin{array}{l} \quad 101 \\ ------ \\ \quad 1111 : 11 \\ \quad 11 \\ -- \\ \quad = 11 \\ \quad\quad 11 \\ --- \\ \quad\quad\quad = \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$5 : 3 = (101)_2 : (11)_2 = (101)_2 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 5.$$

2.6 Liczby binarne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby binarne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest równa 0 to liczba binarna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby binarnej jest 1 to liczba binarna jest nieparzysta.

2.6.1 Liczby binarne parzyste

1. Liczby binarne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby binarne
   $$10,\ 110,\ 1010,\ 110110,\ 111110110$$
   mają cyfrę jedności 0, dlatego są parzyste.

2. Liczby binarne parzyste są podzielne przez binarne 10, zatem mają ogólną postać [2]
   $$n = 10 * k, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$
   Na przykład
   $$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 10 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 10 * 1 = 10, \\ k = 10, & n = 10 * 10 = 100, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k = 1000, & n = 1000 * 100 = 10000, \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb binarnych parzystych jest liczbą binarną parzystą
   Na przykład:
   $$a = 1000, \quad b = 110,$$
   $$a + b = 1000 + 110 = 1110,$$
   $$a - b = 1000 - 110 = 10,$$
   $$a * b = 1000 * 110 = 110000$$

2.6.2 Liczby binarne nieparzyste

Własności liczb binarnych nieparzystych

1. Liczby binarne nieparzyste mają cyfrę jedności 1.
   Na przkład liczby binarne
   $$1\ 11,\ 111,\ 1011,\ 110111,\ 111110111$$
   mają odpowiednio cyfrę jedności 1.

2. Liczby binarne nieparzyste mają ogólną postać
   $$n = (10)_2 * k + 1, \quad \text{lub}\ n = (10)_2 * k - 1, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 10, 100, 110, 1000, ...;$$

[2] Tutaj binarne liczby $(10)_2 = 10,\ 110 = (110)_2,\ 1010 = (1010)_2$ itd...; piszemy bez nawiasów

Na przykład

$$\begin{array}{llll}
k=0, & n=10*0+1=1, & lub & n=10*0-1=-1 \\
k=1, & n=10*1+1=11, & lub & n=10*1-1=1 \\
k=10, & n=10*10+1=101, & lub & n=10*10-1=11 \\
k=1000, & n=10*1000+1=10001, & lub & n=10*1000-1=1111 \\
\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots
\end{array}$$

3. Suma lub różnica dwóch liczb binarnych nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$101+11=1000, \quad 101-11=10$$

   Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb binarnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:

$$101*11=1111, \quad 111*101=100011$$

   Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6.

$$101+110=1011.$$

   Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8.

$$111-100=11$$

   Podaj inny przykład.

2.7 Ćwiczenia

Zadanie 2.1 *Suma dwóch kolejnych liczb binarnych nieparzystych równa jest* $(100000)_2$. *Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby binarne nieparzyste to

$$(10)_2*n-1, \quad (10)_2*n+1$$

Ich suma [3]

$$(10*n-1)+(10*n+1)=100*n=100000$$

[3]Tutaj pomijamy nawias $10 \equiv (10_2$

Obliczamy n:

$$100 * n = 100000, \quad \text{to} \quad n = 100000 : 100 = 1000$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste

$$10 * n - 1 = 10 * 1000 - 1 = 1111, \quad 10 * n + 1 = 10 * 1000 + 1 = 1001.$$

Sprawdzenie w systemie binarnym:

$$(10 * n - 1) + (10 * n + 1) = 10 * 1111 + 10 * 1001 = 11110 + 10010 = 100000$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 2.2 *Suma trzech kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(11000)_2$*. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby binarne parzyste to

$$10 * n - 10, \quad 10 * n, \quad 10 * n + 10.$$

Ich suma

$$(10 * n - 10) + (10 * n) + (10 * n + 10) = 110 * n = (11000)_2.$$

Obliczamy n:

$$110 * n = 11000, \quad n = 11000 : 110 = 100.$$

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$10 * n - 10 = 10 * 100 - 10 = 110,$$

$$10 * n = 10 * 100 = 1000,$$

$$10 * n + 10 = 10 * 100 + 10 = 1010,$$

Sprawdzenie:

$$(110)_2 + (1000)_2 + (1110)_2 + (1010)_2 = (11000)_2.$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 2.3 *Oblicz sumę liczb binarnych*

$$S_{1010} = 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego i jednej operacji dzielenia binarnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$
\begin{array}{ccc}
S_{1010} & = & 1 + 10 + 11 + 110 + 101 + 110 + 111 + 1000 + 1001 + 1010 \\
S_{10} & = & 1010 + 1001 + 1000 + 111 + 110 + 101 + 100 + 11 + 10 + 1 \\
--- & ... & ------------------- \\
10 * S_{1010} & = & \underbrace{1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011 + 1011}_{1010 \ skladnikow \ sumy}
\end{array}
$$

Skąd obliczmy sumę S_{1010} używając jednej operacji binarnego mnożenia i jednej operacji binarnego dzielenia.

$$(10)_2 * S_{1010} = (1010)_2 * (1011)_2 = (1101110)_2$$

$$S_{1010} = (1101110)_2 : (10)_2 = (11111)_2$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

2.8 Zadania

Zadanie 2.4 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby binarne stusując algorytm przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdź otrzymane wyniki przeliczenia.

Zadanie 2.5 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 513 *i* 25 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Dodaj liczby binarne*

$$(1000000001)_2 + (100001)_2$$

Zadanie 2.6 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 256 *i* 16 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Odejmij liczby binarnych*

$$(100000000)_2 - (1000)_2$$

Sprawdź wynik odejmowanie.

Zadanie 2.7 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 129 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Pomnóż liczby* 129 *i* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik mnożenia.*

Zadanie 2.8 .
(a) *Przelicz liczby dziesiętne* 63 *i* 3 *na liczby binarne. Sprawdź wynik przeliczenia.*
(b) *Podziel liczbę* 63 *przez liczbę* 3 *w systemie binarnym Sprawdź wynik dzielenia.*

Zadanie 2.9 *Ile jest różnych liczb binarnych trzycyfrowych?*

Zadanie 2.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2 - (110)_2 : (10)_2$$

Zadanie 2.11 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)
$$(100)_2 * ((10)_2 * (101)_2 + (11)_2 * (101)_2).$$

(b)
$$(10)_2 * ((110)_2 : (10)_2 - (1000)_2 : (100)_2)$$

Zadanie 2.12 *Suma pięciu kolejnych liczb binarnych parzystych równa jest* $(100100)_2$. *Znajdź te liczby.*

Zadanie 2.13 *Oblicz sumę liczb binarnych parzystych*

$$\begin{aligned} S_{10100} &= (10)_2 + (100)_2 + (110)_2 + (1000)_2 + (1010)_2 + (1100)_2 + \\ &+ (1110)_2 + (10000)_2 + (10010)_2 + (10100)_2 \end{aligned}$$

używając tylko jednej operacji mnożenia binarnego.

Chapter 3

System ȯsemkowy. Octalny

W systemie pozycyjnym ȯsemkowym podstawa $\rho = 8$. Wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0)_8$$

Cyfry systemu ȯsemkowego to liczby

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Zatem, współczynniki systemu ȯsemkowego [1]

$$(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$$

przyjmują wartoċi $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Na przykład, liczba ȯsemkowa $x = (\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0)_8 = (1257)_8$ ma
ilośċ jednośċi $8^0 = 1,\ \alpha_0 = 7$,
ilośċ ȯsemek $8^1,\ \alpha_1 = 5$,
ilośċ kwadratȯw ȯsemek $8^2,\ \alpha_2 = 2$
ilośċ kubikȯw ȯsemek $8^3,\ \alpha_3 = 1$.
Zauważmy, że w systemie dziesiętnym podstawą jest liczba 10. W systemie dziesiętnym piszemy liczby używając 10-ciu cyfr

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Natomiast w systemie ȯsemkowym podstawą jest liczba 8. W ȯsemkowym systemie jest osiem cyfr

$$0, 1, 3, 4, 5, 6, 7$$

ktȯre są jednocześnie liczbami jednocyfowymi ȯsemkowymi.
Liczby ȯsemkowe dwucyfrowe piszemy w ogȯlnej postaci

$$a_1 * 8 + a_0 = (a_1a_0)_8$$

gdzie cyfrą ȯsemek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

[1] Liczby oktalne piszemy $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})_8$ w nawiasie z ideksem na dole 8

Przykład 3.1 *Liczba ósemkowa* $x = (65)_8$

$$6 * 8 + 5 * 8^0 = (65)_8.$$

Tytaj cyfrą ósemek jest współczynnik $a_1 = 6$, *cyfra jedności współczynnik* $a_0 = 5$. *Wartość tej liczby ósemkowej w zapisie dziesiętnym jest równa* 53.
Rzeczywiście, obliczmy wartość dziesiętną liczby ósemkowej $(65)_8$

$$(65)_8 = 6 * 8 + 5 * 1 = 53$$

Liczby ósemkowe trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2 a_1 a_0)_2$$

gdzie kolejne potęgi ósemki

$$8 * 8 = 8^2, \;\; 8^1 = 8, \;\; 8^0 = 1.$$

Przykład 3.2 *Na przykład liczbę ósemkową* $x = (256)_8$ *w ogólnym zapisie piszemy*

$$a_2 * 8^2 + a_1 * 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_2 a_1 a_0)_2,$$

$$2 * 8^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = (256)_8,$$

gdzie cyfra ósemkowa $a_2 = 2$ *jest wpółczynnikiem przy* 8^2,
cyfra ósemkowa $a_1 = 5$ *jest wpółczynnikiem przy* 8,
cyfra ósemkowa jedności $a_0 = 6$.
Wartość tej liczby w systemie dziesięnym

$$(256)_8 = 2 * 2^2 + 5 * 8^1 + 6 * 8^0 = 174$$

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie ósemkowym zapisujemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}8^{n-1} + a_{n-2}8^{n-2} + \cdots + a_1 8^1 + a_0 * 8^0 = (a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0)_8$$

Przykład 3.3 *Niech* $n = 5$, *wtedy liczbę ósemkową czterocyfową* $x = (1024)_8$. *piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego*

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = (1024)_8$$

gdzie wpsółczynnik przy 8^3 *jest równy* $a_3 = 1$,
wpsółczynnik przy 8^2 *jest równy* $a_2 = 0$,
wpsółczynnik przy 8^1 *jest równy* $a_1 = 2$,
wpsółczynnik jedności przy 8^0 *jest równy* $a_0 = 4$,
Obliczmy wartość dziesiętną tej liczby

$$1 * 8^3 + 0 * 8^2 + 2 * 8^1 + 4 * 8^0 = 512 + 16 + 4 = 536$$

3.1 Przeliczanie liczb dziesiętnym na liczby ósemkow

Każdą liczbę dziesiętną można przeliczyć na liczbę ósemkową, oktalną. Tak jak dla systemu binarnego to przeliczanie jest proste. Mianowicie, dzielimy liczbę dziesiętną przez 8 i zapisujemy resztę. Następnie część całkowitą tego dzielenia dzielimy przez 8 i zapisujemy resztę. Dalej kontynuujemy dzielenie części całkowitych przez 8 zapisując ich reszty tak długo aż w wyniku dzielenia przez 8 otrzymamy część całkowitą równą 0.
Liczbę ósemkową otrzymujemy pisząc reszty z dzielenia w kolejności zaczynając od ostatniej reszty i kończąc na pierwszej reszcie jako cyfrze ósemkowej jedności. Zobaczmy przeliczanie liczb dziesiętnych na ósemkowe na przykładach.

Przykład 3.4 *Przelicz liczbę dziesiętną $x = 38$ na liczbę ósemkową*

Wykonujemy dzielenia liczby dziesiętnej $x = 38$ przez 8

$$\frac{38}{8} = 4 + \frac{6}{8} \quad reszta\; r_0 = 6 \quad bo \quad 38 = 8 * 4 + 6$$
$$\frac{4}{8} = 0 \qquad reszta\; r_1 = 4 \quad bo \quad 4 = 0 + 4 * 1$$

Pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej otrzymamy liczbę ósemkową

$$x = (r_1 r_0)_8 = (46)_8$$

Powtórzmy kolejne dzielenia liczby 38 przez 8 według innego stosowanego schematu

Liczba $x/2$	|	*Reszta z dzielenia przez 2*
======	=	================
$38/8 = 4$	|	6
$4/8 = 0$	|	4

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (46)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 8 + 1 = 38.$$

3.2 Schemat ogólny przeliczania liczb z sytemu dziesiętnego na ósemkowy

Podobnie jak w wyżej w podanych przykładach, w schemacie ogólnym dzielimy liczbę dziesiętną x przez 8.

$$\frac{x}{2} = k_0 + \frac{r_0}{2}, \quad x = 2 * k_0 + r_0$$

gdzie k_0 to całość i r_0 to reszta z dzielenia x przez 8

3.3 Algorytm

Zapiszmy powyższe kolejne dzielenia przez 8 w następującym schemacie

Liczba x	*Reszta*
==========	====
$x/8 = k_0 + r_0/8$	r_0
$k_0/8 = k_1 + r_1/8$	r_1
$k_1/8 = k_2 + r_2/8$	r_2
$k_2/8 = k_3 + r_3/8$	r_3
$\cdots$	$\cdots$
$k_{m-2}/8 = k_{m-1} + r_{m-1}/8$	r_{m-1}
$k_{m-1}/8 = 0 + r_m/8$	r_m

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_1 r_0)_8$$

3.4 Dowód Alegorytmu

[2] Zauważmy, że wyżej podany algorytm prowadzi do przeliczenia liczby dziesiętnej x na liczbę ósmkową.
Z tego algorytmu znajdujemy

$$\begin{array}{rll|l}
x & = & 8k_0 + r_0 & k_0 = 8k_1 + r_1 \\
 & = & 8^3k_2 + 8^2r_2 + 8r_1 + r_0 & k_2 = 8k_3 + r_3 \\
 & = & 8^4k_3 + 8^3r_3 + 8^2r_2 + 8r_1 + r_0 & k_3 = 8k_4 + r_4 \\
 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
 & = & 8^{m-1}k_{m-2} + 8^{m-2}r_{m-2} + \cdots + 8^2r_2 + 8r_1 + r_0 & k_{m-2} = 8k_{m-1} + r_{m-1} \\
 & = & 8^m k_m + 8^{m-1}r_{m-1} + \cdots + 8^2r_2 + 8r_1 + r_0 & k_{m-1} = 8k_m + r_m \\
 & = & 8^m r_m + 8^{m-1}r_{m-1} + \cdots + 8^2r_2 + 8r_1 + r_0 & k_m = r_m \\
 & = & (r_m r_{m-1} r_{m-2} ... r_2 r_1 r_0)_8 &
\end{array}$$

Zastosujmy powyższy algorytm przeliczając liczbę dziesiętną $x = 256$ na ósemkową.

Liczba x/8	*Reszta z dzielenia przez* 8
====== =	================
$256/8 = 32$	0
$32/8 = 4$	0
$4/8 = 0$	4

[2] Dowód można pominąć. Zanajomość dowodu algorytmu jest nie konieczna w przeliczaniu

W wyniku otrzymujemy liczbę ósemkową pisząc reszty z powyższej tabeli w kolejności od ostatniej do pierwszej

$$x = 256 = (400)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (400)_8 = 4 * 8^2 + 0 * 8^1 + 0 * 8^0 = 256.$$

3.5 Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym

Operacje arytmetyczne w systemie ósemkowym dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wykonujemy w podobny sposób jak w systemie dziesiętnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 10$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach dziesiętnych),$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Podobnie w systemie binarnym uzupełniamy do podstawy $\rho = 2$ wykonując operacje na liczbach (cyfrach binarnych) $0, 1$.

3.5.1 Oktalne dodawanie

Tabliczka oktalnego dodawania

	Dodawanie				oktalnego			
+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	10	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Dodawanie ósemkowe wyjaśniamy na przykładach

Przykład 3.5 *Wykonaj dodawanie ósemkowe liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Liczba dziesiętna 25 w zapisie oktalnym $25 = (31)_8$, liczba dziesiętna 13 w zapisie oktalnym $13 = (15)_8$.
Wykonujemy pisemne ósemkowe dodawanie $(31)_8 + (13)_8$, stosując tabliczkę ósemkowego dodawania.

$$\begin{array}{cc} & 31 \\ + & 15 \\ & -- \\ & 46 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$(46)_8 = 4 * 8 + 6 * 8^0 = 38.$$

3.5.2 Oktalne odejmowanie

Tabliczka oktalnego odejmowania

	Odejmowanie				oktalne			
-	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
5	5	4	3	2	1	0	-1	-2
6	6	5	4	3	2	1	0	-1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 3.6 *Wykonaj odejmowanie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 8

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $8 = (11)_8$, liczba dziesiętna 8 w zapisie oktalnym $8 = (10)_8$.
Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $(11)_8 - (10)_8$, stosując tabliczkę oktalnego odejmowania.

$$\begin{array}{rr} & 11 \\ - & 10 \\ & --- \\ & 1 \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$9 - 8 = (11)_8 - (10)_8 = (1)_8 = 1.$$

3.5.3 Oktalne mnożenie

Tabliczka oktalnego mnożenia

	Mnożenie				oktalne		
*	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	20	31	36	43
6	6	14	22	24	31	36	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Mnożenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 3.7 *Wykonaj mnożenie oktalne liczb dziesiętnych* 9 *i* 15

Liczba dziesiętna 9 w zapisie oktalnym $9 = (11)_8$, liczba dziesiętna 15 w zapisie oktalnym $15 = (17)_8$.
Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $(11)_8 * (17)_8$, stosując tabliczkę oktalnego mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
17 \\
* \;\; 11 \\
- - - \\
17 \\
17 \\
- - - \\
207
\end{array}
$$

Sprawdzenie:
Mnożenie liczb dziesiętnych

$$9 * 15 = 135$$

Mnożenie liczb oktalnych

$$(11)_8 * (17)_8 = (207)_8$$
$$(207)_8 = 2 * 8^2 + 0 * 8^1 + 7 * 8^0 = 2 * 64 + 7 = 135$$

3.5.4 Oktalne dzielenie

Dzielenie oktalne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 3.8 *Wykonaj dzielenie oktalne liczb dziesiętnych* 45 *podziel przez* 3

Liczba dziesiętna 45 w zapisie oktalnym $45 = (55)_8$, liczba dziesiętna 3 w zapisie oktalnym $3 = (3)_3$.

Wykonujemy pisemne oktalne dzielenie $(17)_8 : (3)_8$.

$$\begin{array}{l}
\ \ 17 \\
- - - \\
\ \ 55 : 3 \\
-3 \\
-- \\
\ \ 25 \\
\ \ 25 \\
- - -- \\
\ \ =
\end{array}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{array}{l}
45 : 3 = 15 \\
(55)_8 : (3)_8 = (17)_8 = 1 * 8 + 7 = 15.
\end{array}$$

3.6 Liczby oktalne parzyste i nieparzyste

Podobnie jak w systemie dziesiętnym, liczby oktalne parzyste i nie parzyste poznajemy po cyfrze jedności. Mianowicie, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest równa 0 lub 2 lub 4 lub 6 to liczba oktalna jest parzysta, w przeciwnym przypadku, jeżeli cyfra jedności liczby oktalnej jest 1 lub 3 lub 5 lub 7 to liczba oktalna jest nieparzysta.

3.6.1 Liczby oktalne parzyste

1. Liczby oktalne parzyste mają cyfry jedności 0.
   Na przkład liczby oktalne

   $$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20,\ 22,\ 24$$

   mają cyfrę jedności 0, 2 4, 6, dlatego są parzyste.

2. Liczby oktalne parzyste są podzielne przez oktalną 2, zatem mają ogólną postać [3]

   $$n = 2 * k, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, ...;$$

   Na przykład

   $$\begin{array}{ll}
   k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\
   k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\
   k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\
   k = 3, & n = 2 * 3 = 6, \\
   k = 4, & n = 2 * 4 = 10, \\
   k = 5, & n = 2 * 5 = 12, \\
   \dots & \dots\dots\dots\dots
   \end{array}$$

[3] Tutaj oktalne liczby $(1)_8 = 1,\ (2)_8 = 2,\ (3)_8$ itd...; piszemy bez nawiasów

3. Suma, różnica i iloczyn liczb oktalnych parzystych jest liczbą oktalną parzystą
   Na przykład:

$$a = (12)_8, \quad b = (36)_8,$$

$$a + b = (12)_8 + (36)_8 = (50)_8,$$

$$a - b = (12)_8 - (50)_8 = -(24)_8,$$

$$a * b = (12)_8 * (36)_8 = (454)_8$$

3.6.2 Liczby oktalne nieparzyste

Własności liczb oktalnych nieparzystych

1. Liczby oktalne nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7.
   Na przkład liczby binarne

   1 23, 35, 47, 121, 123, 125, 127

   mają odpowiednio cyfry jedności 1, 3 5 7 1, 3 5 7..

2. Liczby pktalne nieparzyste mają ogólną postać

$$n = (2)_8 * k + 1, \quad \text{lub } n = (2)_8 * k - 1, \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$$

   Na przykład

$$\begin{array}{llll}
k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\
k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\
k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\
k = 3, & n = 2 * 3 + 1 = 7, & lub & n = 2 * 3 - 1 = 5 \\
k = 4, & n = 2 * 4 + 1 = 11, & lub & n = 2 * 4 - 1 = 7 \\
k = 5, & n = 2 * 5 + 1 = 13, & lub & n = 2 * 5 - 1 = 11 \\
k = 6, & n = 2 * 6 + 1 = 15, & lub & n = 2 * 6 - 1 = 13 \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

3. Suma lub różnica dwóch liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą parzystą.

$$(13)_8 + (11)_8 = (24)_8, \quad (13)_8 - (11)_8 = 2$$

   Podaj inny przykład.

4. Iloczyn liczb oktalnych nieparzystych jest liczbą nieparzystą
   Na przykład:

$$(13)_8 * (11)_8 = (143)_8,$$

   Podaj inny przykład.

5. Natomiast suma liczby oktalnej nieparzystej i liczby oktalnej parzystej jest liczbą nieparzysta.

   Na przykład

6. $$(26)_8 + (15)_8 = (43)_8.$$

   Podaj inny przykład

7. Podobnie, różnica liczby binarnej nieparzystej i liczby binarnej parzystej jest licbąnieparzystą. Na przykład

8. $$(26)_8 - (15)_8 = (11)_8$$

   Podaj inny przykład.

3.7 Ċwiczenia

Zadanie 3.1 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne*

(a) x=100

(b) y=500

Rozwiązanie (a):
Dzielimy liczbę dziesiętną 100 przez 8 według schematu

Liczba $x/8$	*Reszta z dzielenia przez* 8
$100/8 = 12$	4
$12/8 = 1$	4
$1/8 = 0$	1

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 100$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (144)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (144)_8 = 1 * 8^2 + 4 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100$$

Rozwiązanie (b):
Dzielimy liczbę dziesiętną 500 przez 8 według schemtatu

Liczba $x/8$	*Reszta z dzielenia przez* 8
$500/8 = 62$	4
$62/8 = 7$	6
$7/8 = 0$	7

Zapis oktalny liczby dziesiętnej $x = 500$ otrzymamy pisząc reszty tego dzielenie od ostatniej do pierwszej

$$x = (764)_8$$

Sprawdzenie:

$$x = (764)_8 = 7 * 8^2 + 6 * 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 448 + 48 + 4 = 500$$

Zadanie 3.2 *Suma dwóch kolejnych liczb oktalnych nieparzystych równa jest* $(500)_8$*. Znajdź te liczby binarne.*

Rozwiązanie:
Dwie kolejne liczby oktalne nieparzyste to

$$(2)_8 * n - 1, \quad (2)_8 * n + 1$$

Ich suma [4]

$$(2 * n - 1) + (2 * n + 1) = 4 * n = 500$$

Obliczamy n:

$$4 * n = 500, \quad \text{to} \quad n = 500 : 4 = 120$$

Obliczmy dwie kolejne liczby nieparzyste oktalne

$$(2)_8 * n - 1 = (2)_8 * (120)_8 - 1 = (237)_8,$$

$$(2)_8 * n + 1 = (2)_8 * (120_8 + 1 = (241)_8.$$

Sprawdzenie w systemie oktalnym:

$$(2)_8 * n - 1) + ((2)_8 * n + 1) = (237)_8 + (241)_8 = (500)_8$$

Sprawdź rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 3.3 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(52)_8$*. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne trzy liczby oktalne parzyste to

$$(2)_8 * n - (2)_8, \quad (2)_8 * n, \quad (2)_8 * n + (2)_8.$$

Ich suma

$$[(2)_8 * n - (2)_8] + (2)_8 * n + [(2)_8 * n + (2)_8] = (6)_8 * n = (52)_8.$$

Obliczamy n:

$$(6)_8 * n = (52)_8, \quad n = (52)_8 : (6)_8 = (7)_8.$$

[4] Tutaj pomijamy nawias $2 \equiv (2)_8$ wykonując operacje na liczbach oktalnych

Obliczmy trzy kolejnych liczb binarne parzyste

$$(2)_8 * n - (2)_8 = (2)_8 * (7)_8 - (2)_8 = (14)_8,$$

$$(2)_8 * n = (2)_8 * (7)_8 = (16)_8,$$

$$(2)_8 * n + (2)_8 = (2)_8 * (7)_8 + (2)_8 = (20)_8.$$

Sprawdzenie:

$$(14)_8 + (16)_8 + (20)_8 = (52)_8.$$

Sprawdż rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

Zadanie 3.4 *Oblicz sumę liczb oktalnych*

$$S_{20} = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 20$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego i jednej operacji dzielenia oktalnego.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami składniki sumy wykonując dodawanie oktalne na liczbach oktalnych, jak niżej:

$$\begin{array}{rcl}
S_{20} & = & 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 20 \\
S_{20} & = & 20 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 \\
--- & . & ------------------- \\
2 * S_{20} & = & \underbrace{30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30}_{(11)_8 \textit{ oktalnych skladnikow sumy}}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednej operacji oktalnego mnożenia i jednej operacji oktalnego dzielenia.

$$(2)_8 * S_{20} = (11)_8 * (36)_8 = (416)_8$$

$$S_{20} = (416)_8 : (2)_8 = (207)_8$$

Sprawdż rozwiązanie w systemie dziesiętnym.

3.8 Zadania

Zadanie 3.5 *Przelicz liczby dziesiętne na liczby oktalne stusując algorytm oktalnego przeliczania.*

(a) $x = 53$

(b) $x = 1025$

Sprawdż otrzymane wyniki przeliczenia w systemie oktalnym i systemie dziesiętnym.

Zadanie 3.6 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 513 *i* 25 *na liczby oktalne.*
(b) Dodaj liczby oktalne

$$(1003)_8 + (10005)_8$$

Sprawdż wynik dodawania w systemie oktalnym i dziesiętnym

Zadanie 3.7 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 256 *i* 16 *na liczby oktalne.*
(b) Odejmij liczby oktalnych

$$(10005)_8 - (1003)_8$$

Sprawdż wynik odejmowanie w systemie oktalnym i dziesiętnym.

Zadanie 3.8 .
(a) Przelicz liczby dziesiętne 129 *i* 3 *na liczby binarne.*
(b) Pomnóż liczby 129 *i* 3 *w systemie oktalnym Sprawdż wynik mnożenia w systemie oktalnym i dziesieętnym.*

Zadanie 3.9 *Ile jest różnych liczb oktalnych dwucyfrywych?*

Zadanie 3.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego liczb oktalnych zachowując kolejność operacji dodawania,odejmowania, mnożenia i dzielenia.*

$$(10)_8 * (11)_8 + (12)_8 * (13)_8 - (14)_8 : (4)_8$$

Zadanie 3.11 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego zachowując kolejność operacji arytmetycznych z nawiasami.*

(a)

$$(2)_8 * [(10)_8 * (11)_8 + (11)_8 * (12)_8].$$

(b)

$$(3)_8 * [(160)_8 : (10)_8 - (20)_8 : (100)_8]$$

Sprawdż wynik oktalnych obliczeń w systemie dziesiętnym.

Zadanie 3.12 *Suma trzech kolejnych liczb oktalnych parzystych równa jest* $(14)_8$. *Znajdż te liczby.*

Zadanie 3.13 *Oblicz sumę liczb oktalnych nieparzystych*

$$S_{23} = (11)_8 + (13)_8 + (15)_8 + (17)_8 + (21)_8 + (23)_8$$

używając tylko jednej operacji mnożenia oktalnego.