SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby x

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

Błąd względny zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

Błąd procentowy zaokrąglenia liczby $x \neq 0$

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

MATEMATYKA
REPREZENTACJA LICZB W KOMPUTERZE

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2018[1]

[1] Czwarty projekt

Contents

Chapter 1

Reprezentacja liczb w komputerze.

Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r-tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r-tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r-ym miejscu kasujemy. Operacje zaokrąglania liczby x na r-tym miejscu oznaczamy symbolem $fl_r(x)$.

Przykład 1.1 *Zaokrąglamy liczbę* $\dfrac{22}{7}$ *na 5-tym miejscu po przecinku jak następuje:*

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857...; \quad fl_5(3.142857142857...) = 3.14286, \quad r = 5.$$

1.1 Zapis liczb w zmiennym przecinku

W obliczeniach z użyciem systemów obliczeniowych i komputerów liczby zapisywane są w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m 10^c, \quad m - \text{ mantysa}, \quad c - \text{ cecha},$$

gdzie mantysa $m = 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$; $\alpha_1 \neq 0$; $0 \leq \alpha_i \leq 9$; $i = 1, 2, \dots, r$ Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \neq 0$ jest zawsze różna od zera.
Dlatego mantysa m spełnia następującą nierówność

$$0.1 \leq m < 1.$$

Jasne, że liczba x może mieć dokładną zmienno przecinkową reprezentacje w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład $\frac{1}{4}$ ma dokładną reprezentacje gdyż jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 0$.
Natomiast, mantysa liczby

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

ma nieskończenie wiele cyfr $m = 0.333...$, i nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.
Każdą liczbę, nawet z mantysą o nieskończonej ilości cyfr, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zaokrągleń mantysy na r-tym miejscu po przecinku.

$$\epsilon \leq 0.\underbrace{000...0}_{r-zer}5 = 0.5\ 10^{-r}.$$

Na przykład

$$x = \frac{2}{3} = 0.66666666666...$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku ($r = 4$)

$$fl(x) = 0.6667$$

ma błąd zaokrągleń $\epsilon = 0.0000333...$

Zadanie 1.1 *Zaokrąglij następujące liczby na 3-cim miejscu po przecinku i zapisz je w zmiennym przecinku*

$$2\frac{3}{4},\ \frac{29}{7},\ -\frac{238}{13}.$$

1.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Bezwzględny błąd zaokrąglenia liczby
$x = \mp m 10^c$

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Ten błąd spełnia nierówność

$$\mid fl_r(x) - x \mid \leq \epsilon * 10^c,$$

gdzie $\epsilon = 0.5\, 10^{-r}$.
Niech

$$x = 0.57367864 * 10^2, \quad r = 3.$$

Wtedy błąd bezwględny liczby x na trzecim miejscu po przecinkuzlędny zaokąglenia wynosi

$$\mid fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2 \mid =$$

$$\mid 0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2 \mid = 0.032136 < \frac{1}{2}\ 10^{-3} * 10^2 = 0.05.$$

1.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Względny błąd zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m\ 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:

$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x}, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność

$$\mid \frac{\mid fl_r(x) - x}{x} \mid \leq 0.5 * 10^{1-r}, \quad x \neq 0.$$

Rzeczywiście,

$$\mid \frac{fl_r(x) - x}{x} \mid = \mid \frac{fl_r(\mp m 10^c) \pm m 10^c}{\mp m 10^c} \mid \leq \mid \frac{0.5 *\ 10^{-r}}{\mp m} \mid \leq 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Tak więc błąd względny nie przewyższa komputerowej precyzji $\delta = \dfrac{1}{2} 10^{1-r}$.

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja $\delta = \dfrac{1}{2} 10^{-2}$

Obliczamy względny błąd zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$|\frac{fl(x) - x}{x}| = \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = 0.0005601742.$$

Błąd względny bezpośrednio związany jest z błędem procentowym.
Mianowicie, błąd procentowy wyraża się wzorem

$$p\% = 100 * \delta_x\% = 100\frac{fl(x) - x}{x}\%, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Obliczamy błąd procentowy liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$p\% = 100 * \ 0.5601742 * 10^{-3}\% = 0.5601742 * 10^{-1}\% = 0.05601742\%.$$

Wyniki obliczeń w komputerze czterech operacji arytmetycznych $x \pm y$, xy i dzielenia x/y na ogół są niedokładne, nawet jeżeli x i y są dane w postaci dokładnej.
Na przykład, niech $x = 0.11111111$ i $y = 0.55555555$ będą 8-cyfrowymi liczbami w 8-mio cyfrowej arytmetyce w komputerze, (8-cyfr mantysa).
Zauważamy, że wynik mnożenia $xy = 0.617283938271605 * 10^{-1}$ ma 15-sto cyfrową mantysę $m = 0.617283938271605$, która automatycznie jest zaokrąglona w komputerze do 8 cyfrowej mantysy 0.61728394 z błędem bezwzględnym $\epsilon_x = 0.000000018271605$.

Przykład 1.2 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zmienno - przecinkowym*

$$\frac{2\frac{1}{3} * 3\frac{1}{7} + 45.27}{4\frac{2}{9}}$$

Podaj: błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy obliczeń.

Rozwiązanie. Najpierw, napiszemy liczby $x = 2\frac{1}{3}$, $y = 3\frac{1}{7}$, $z = 45.27$, $t = 4\frac{2}{9}$ w postaci zmiennego przecinka, potem zaokrąglimy do miejsca $r = 3$ i podamy błąd zaokrąglenia każdej z danych liczb

$$\begin{array}{lll}
x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...; & fl_3(x) = 0.233 * 10, & \epsilon_x = 0.003333....; \\
y = 3\frac{1}{7} = 3.142857142857...; & fl_3(y) = 0.314 * 10, & \epsilon_y = 0.0042857....; \\
z = 45.27 & fl_3(z) = 0.453 * 10^2, & \epsilon_z = 0.07 \\
t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...; & fl_3(t) = 0.422 * 10, & \epsilon_t = 0.00222....;
\end{array}$$

Dalej, stosując reguły kolejności wykonywania operacji arytmetycznych, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie, obliczmy wartość wyrażenia w arytmetyce 3-cyfrowej:

$$\begin{array}{lcl}
Iloczyn & = & fl_3(2\frac{1}{3}) * fl_3(3\frac{1}{7}) = fl_3(2.33 * 3.14) = fl_3(7.3162) = 7.32 \\
Suma & = & fl_3(7.32 + fl_3(45.274)) = fl_3(7.32 + 45.3) = fl_3(52.62) = 52.6 \\
Licznik & = & 52.6, \quad Mianownik = 4.22, \\
\frac{Licznik}{Mianownik} & = & fl_3(\frac{52.6}{4.22}) = fl_3(12.4645) = 12.5,
\end{array}$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego w 3 cyfrowej arytmetyce wynosi 12.5
Teraz obliczmy wartość tego wyrażenia w 5-cio cyfrowej arytmetyce.
Mamy następujące dane:

$$\begin{array}{lll}
x = 2\frac{1}{3} = 2.33333...; & fl_5(x) = 0.23333*10, & \epsilon_x = 0.00003333....; \\
y = 3fl_5\frac{1}{7} = 3.142857142857...; & fl_5(y) = 0.31429*10, & \epsilon_y = 0.000042857....; \\
z = 45.27 & fl_5(z) = 0.4527*10^2, & \epsilon_z = 0.0 \\
t = 4\frac{2}{9} = 4.222222...; & fl_5(t) = 0.42222*10, & \epsilon_t = 0.0000222....;
\end{array}$$

Podobnie, obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego w 5-cio cyfrowej arytmetyce

$$\begin{array}{lll}
Iloczyn & = & fl_5(2\frac{1}{3})*fl_5(3\frac{1}{7}) = fl_5(2.3333*3.1429) = fl_3(7.333333) = 7.3333 \\
Suma & = & fl_5(7.3333 + fl_5(45.27)) = fl_5(7.3333 + 45.27) = fl_5(52.6033) = 52.603 \\
Licznik & = & 52.603, \quad Mianownik = 4.2222, \\
\frac{Licznik}{Mianownik} & = & fl_5(\frac{52.603}{4.2222}) = fl_3(12.4587) = 12.459
\end{array}$$

Odpowiedz: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego wyżej w 5-cio cyfrowej arytmetyce wynosi 12.459
Błędy: Dokładna wartość wyrażenia: $= 12.457$
Błąd bezwględny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $12.5 - 12.457 = 0.043$.
Błąd względny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.043}{12.457} = 0.00345$; 0.345%
Błądu bezwględny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $12.459 - 12.457 = 0.002$.
Błąd względny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $= \frac{0.002}{12.457} = 0.00016$; 0.016%.

Zadanie 1.2 *Oblicz wartość następującego wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zienno - przecinkowym*

$$\frac{7\frac{2}{3}*9\frac{3}{7}+125.97}{3\frac{7}{9}} + 256.75$$

Podaj błędy: bezwzględny, względny i procentowy obliczeń.