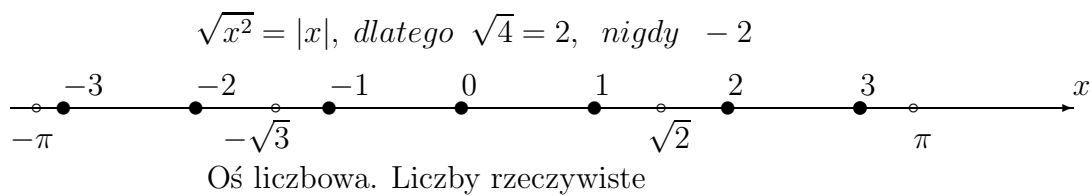


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
 02-892 WARSZAWA
 ul. BAŻANCIA 16



MATEMATYKA
W SZKOLE HELIANTUS
LICZBY WYMIERNE I RZECZYWISTE

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

Warszawa 2018¹

¹Projekt drugi

Contents

1	Liczby wymierne i liczby rzeczywiste	5
1.1	Oś liczbowa	5
1.2	Ułamki zwykłe	6
1.2.1	Dodawanie ułamków	7
1.2.2	Odejmowanie ułamków	8
1.2.3	Mnożenie ułamków	9
1.2.4	Dzielenie ułamków	9
1.3	Zbiór liczb wymiernych	9
1.3.1	Wyrażenia arytmetyczne	11
1.3.2	Wyrażenia algebraiczne	12
1.3.3	Wyrażenie algebraiczne liniowe	12
1.3.4	Równanie liniowe	13
1.3.5	Nierówności	14
1.4	Ułamki dziesiętne	16
1.4.1	Procenty i promile	18
1.4.2	Procent składany	20
1.5	Liczby rzeczywiste	22
1.5.1	Wartość bezwzględna	23
1.5.2	Wyrażenia algebraiczne w zbiorze liczb rzeczywistych	26
1.5.3	Ciąg arytmetyczny i szereg arytmetyczny.	28
1.5.4	Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.	30

Chapter 1

Liczby wymierne i liczby rzeczywiste

1.1 Oś liczbowa

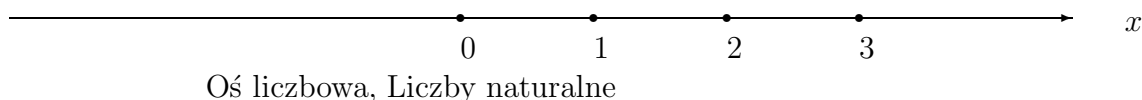
Zacznijmy od podsumowania wiedzy o liczbach naturalnych i liczbach całkowitych.

Niżej podajemy graficzny obraz tych zbiorów na osi liczbowej.

Zbiór liczb naturalnych

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Przypominamy, że w zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb naturalnych

$$n + m = s, \quad n, m \in N, \quad \text{to} \quad s \in N$$

jest liczbą naturalną

Na przykład

$$3 + 5 = 8, \quad 3, 5 \in N, \quad 8 \in N$$

Podobnie iloczyn dwóch liczb naturalnych

$$n * m = s, \quad n, m \in N, \quad \text{to} \quad s \in N$$

jest liczbą naturalną

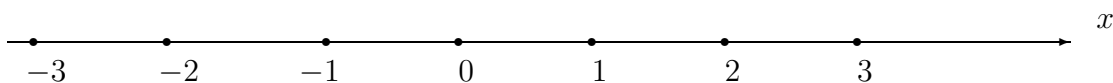
Na przykład

$$3 * 5 = 15, \quad 3, 5 \in N, \quad 15 \in N$$

Dołączając wszystkie liczby ujemne przeciwne do liczba naturalnych otrzymamy zbiór liczb całkowitych Zbiór liczb całkowitych

$$C = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

zaznaczamy na osi liczbowej



Oś liczbowa. Liczby całkowite

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie i mnożenie. To znaczy, że suma dwóch liczb całkowitych

$$n + m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą naturalną

Na przykład

$$-10 + (-5) = -10 - 5 = -15, \quad -10, -5 \in N, \quad -15 \in N$$

Podobnie różnica dwóch liczb całkowitych

$$n - m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą

Na przykład

$$-12 - (-5) = -12 + 5 = -7, \quad -12, -5 \in C, \quad -7 \in C$$

Również iloczyn dwóch liczb całkowitych

$$n * m = s, \quad n, m \in C, \quad \text{to} \quad s \in C$$

jest liczbą całkowitą

Na przykład

$$-10 * (-5) = 50, \quad -10, -5 \in C, \quad 50 \in C$$

Natomiast, iloraz dwóch liczb całkowitych nie musi być liczbą całkowitą

Na przykład

$$\frac{3}{5}$$

jest ułamkiem, a nie jest liczbą całkowitą.

Niżej określamy liczby wymierne jako zbiór wszystkich możliwych ułamków.

1.2 Ułamki zwykłe

Licznik i mianownik ułamka zwykłego

$$\frac{\overbrace{5}^{\text{licznik}}}{\underbrace{8}_{\text{mianownik}}}$$

Ułamki zwykłe

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$$

W tych ułamkach liczniki są te same równe 1. Natomiast mianowniki tych ułamków są kolejnymi liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Niżej podane ułamki mają różne liczniki i różne mianowniki.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{3}{11}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}$$

1.2.1 Dodawanie ułamków

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach: dodajemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.1 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} &= \frac{1+1+1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= \frac{1+1+1+1}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

Przykład 1.2 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{3}{2} &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} &= \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Dodajemy ułamki o różnych mianownikach: należy znaleźć wspólny mianownik, może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 1.3 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} &= \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{24}{60} = \frac{20+15+24}{60} = \frac{59}{60} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{5} &= \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}\end{aligned}$$

1.2.2 Odejmowanie ułamków

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach: odejmujemy liczniki zostawiamy ten sam mianownik

Przykład 1.4 *Odejmij ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= \frac{1-1}{2} = 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} &= \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} &= \frac{4-2-1}{5} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Przykład 1.5 *Dodaj ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{3}{2} &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} &= \frac{1+2+3+5}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Przykład 1.6 *Odejmij ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} - \frac{1}{9} &= \frac{7-1}{9} = \frac{6}{9} \\ \frac{13}{20} - \frac{5}{20} + \frac{3}{20} &= \frac{13-5+3}{20} = \frac{12}{20} \\ \frac{37}{50} - \frac{23}{50} &= \frac{37-23}{50} = \frac{14}{50}\end{aligned}$$

Odejmujemy ułamki o różnych mianownikach: należy znaleźć wspólny mianownik, może to być najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników

Przykład 1.7 *Odejmij ułamki*

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} - \frac{1}{3} &= \frac{5-3*1}{9} = \frac{2}{9} \\ \frac{33}{25} - \frac{21}{50} &= \frac{2*33-21}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} \\ \frac{14}{15} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} &= \frac{14-3*2+5*2}{15} = \frac{14-6+10}{15} = \frac{18}{15} \\ \frac{253}{500} - \frac{126}{1000} &= \frac{2*253-126}{1000} = \frac{506-126}{1000} = \frac{380}{1000}\end{aligned}$$

1.2.3 Mnożenie ułamków

Operacja mnożenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ mnożymy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy licznik, mianownik razy mianownik

$$\frac{p}{q} * \frac{s}{t} = \frac{p * s}{q * t}, \quad q \neq 0, \quad t \neq 0$$

Przykład 1.8 Pomnóż ułamki

$$(a) \quad \frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{2 * 4}{3 * 5} = \frac{8}{15}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} * \frac{21}{25} = \frac{10 * 21}{13 * 25} = \frac{210}{273}$$

1.2.4 Dzielenie ułamków

Operacja dzielenia ułamków jest bardzo prosta. Ułamek $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ dzielimy przez ułamek $\frac{s}{t}$, $s \neq 0$ według schematu: licznik razy mianownik, mianownik razy licznik

$$\frac{p}{q} : \frac{s}{t} = \frac{p * t}{q * s}, \quad q, s \neq 0, \quad p, t \neq 0$$

Przykład 1.9 Podziel ułamki

$$(a) \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 * 5}{4 * 3} = \frac{10}{12}$$

$$(b) \quad \frac{10}{13} : \frac{21}{25} = \frac{10 * 25}{13 * 21} = \frac{250}{273}$$

1.3 Zbiór liczb wymiernych

Dołączając do zbioru liczb całkowitych wszystkie ułamki otrzymamy zbiór liczb wymiernych. Ułamki

$$\dots - \frac{17}{5}, -\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \dots$$

nie są liczbami całkowitymi. Ogólnie, dla liczb całkowitych p i $q \neq 0$ ułamek

$$\frac{p}{q},$$

nie jest liczbą całkowitą, jeżeli $q \neq 1$. Dla $q = 1$ ułamek jest liczbą całkowitą. Zbiór wszystkich liczb całkowitych razem ze zbiorem wszystkich możliwych

ułamków tworzą zbiór liczb wymiernych. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą W i piszemy

$$W = \left\{ \frac{p}{q} : \text{dla całkowitych liczb } p \text{ i } q \neq 0 \right\}$$

Zbiór liczb wymiernych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez liczby różne od zera. To znaczy dla dowolnych liczb wymiernych $w_1, w_2 \in W$ wynik czterech operacji jest liczbą wymierną

$$w_1 + w_2 \in W, \quad w_1 - w_2 \in W, \quad w_1 * w_2 \in W, \quad \frac{w_1}{w_2} \in W, \quad w_2 \neq 0.$$

Na przykład, dla

$$w_1 = -\frac{2}{3} \in W, \quad w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

suma

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 * 4 + 3 * 3}{12} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12} \in W$$

jest liczbą wymierną

Dla

$$w_1 = -\frac{1}{2} \in W, \quad w_2 = \frac{2}{3} \in W$$

różnica

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1 * 3 - 2 * 2}{6} = \frac{3 - 4}{6} = -\frac{1}{6} \in W$$

jest liczbą wymierną

Dla

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \quad w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloczyn

$$w_1 * w_2 = \frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2 * 3}{3 * 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \in W$$

jest liczbą wymierną

Również, dla liczb

$$w_1 = \frac{2}{3} \in W, \quad w_2 = \frac{3}{4} \in W$$

iloraz

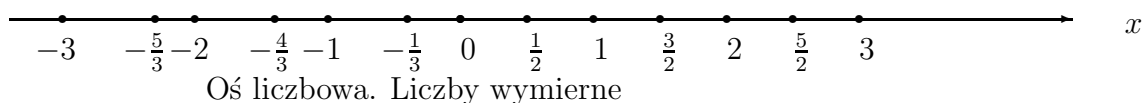
$$w_1 : w_2 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 * 4}{3 * 3} = \frac{8}{9} \in W$$

jest liczbą wymierną

Zauważmy, że zbiór liczb wymiernych jest wszędzie gęsty. To znaczy pomiędzy dwoma różnymi liczbami wymiernymi w_1, w_2 istnieje "dużo" innych liczb wymiernych, na przykład ich średnia arytmetyczna $\frac{w_1 + w_2}{2} \in W$.

Ponadto, zbiór liczb wymiernych W jest najmniejszym zbiorem liczbowym zamkniętym ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Mianowicie, złóżmy na chwile, że liczba wymierna x nie należy do zbioru W , ($x \notin W$). Ponieważ każda liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$ dla pewnych całkowitych p i $q \neq 0$. To znaczy, że nie ma liczb wymiernych poza zbiorem W .

Liczby wymierne są reprezentowane jako punkty na osi liczbowej



1.3.1 Wyrażenia arytmetyczne

Przypominamy, że wyrażeniem arytmetycznym nazywamy ciąg liczb, w tym liczb wymiernych, połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Kolejność wykonywanych operacji najpierw mnożenie, potem w kolejności dzielenie, dodawanie i odejmowanie w wyrażeniach bez nawiasów. W wyrażeniach z nawiasami, w pierwszej kolejności obliczamy wartości w nawiasach.

Przykłady wyrażeń arytmetycznych bez nawiasów

Przykład 1.10 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}$$

Przykład 1.11 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3}}$$

Przykład 1.12 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}}{\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}}$$

Przykłady wyrażeń arytmetycznych z nawiasami

Przykład 1.13 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})}{(\frac{2}{3} + \frac{3}{4})(\frac{4}{3} + \frac{5}{4})}$$

Przykład 1.14 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{(\frac{2}{5} * \frac{3}{5} - \frac{2}{9} * \frac{3}{8})(\frac{3}{5} * \frac{3}{5} - \frac{1}{5} * \frac{3}{5})}{(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})(\frac{5}{3} * \frac{2}{5} + \frac{3}{7} * \frac{7}{3})}$$

Przykład 1.15 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego*

$$\frac{\left(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3} * \frac{2}{5} - \frac{1}{2} * \frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3} * \frac{1}{4} + \frac{3}{4} * \frac{4}{3}\right)}$$

1.3.2 Wyrażenia algebraiczne

Oprócz wyrażeń arytmetycznych, mamy wyrażenia algebraiczne. W wyrażeniach algebraicznych dopuszczamy litery, symbole o zmiennej wartości. Zatem, wyrażeniem algebraicznym nazywamy ciąg liczb i liter połączonych operacjami arytmetycznymi dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.

Przykład 1.16 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości $a = 2$*

$$\frac{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{3} + \frac{a}{4}}$$

Przykład 1.17 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości $b = 1$*

$$\frac{\frac{2}{b} * \frac{3}{b} - \frac{2}{b} * \frac{3}{b}}{\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}}$$

Przykład 1.18 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla wartości $c = 3$*

$$\frac{\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{3} * \frac{3}{c}}{\frac{c}{3} * \frac{1}{c} + \frac{3}{c} * \frac{c}{3}}$$

Przykłady wyrażeń algebraicznych z nawiasami

Przykład 1.19 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $a = 2$*

$$\frac{\left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3} + \frac{a}{4}\right)\left(\frac{4}{a} + \frac{a}{4}\right)}$$

Przykład 1.20 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $b = 3$*

$$\frac{\left(\frac{b}{5} * \frac{3}{b} - \frac{b}{9} * \frac{3}{b}\right)\left(\frac{3}{b} * \frac{3}{b} - \frac{1}{b} * \frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{b}{3} * \frac{2}{b} + \frac{3}{7} * \frac{b}{3}\right)\left(\frac{b}{3} * \frac{b}{5} + \frac{b}{7} * \frac{b}{3}\right)}$$

Przykład 1.21 *Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla $c = 1$*

$$\frac{\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5}\right)\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{5} - \frac{c}{2} * \frac{c}{5}\right)}{\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3}\right)\left(\frac{c}{3} * \frac{c}{4} + \frac{c}{4} * \frac{c}{3}\right)}$$

1.3.3 Wyrażenie algebraiczne liniowe

Wyrażenie algebraicznym

$$a * x + b$$

jest liniowe ze względu na zmienną x , gdzie współczynniki wyrażenia liniowego a i b mają ustaloną wartość.

Na przykład

$$\begin{aligned} 2 * x + 1, & \quad a = 2, \quad b = 1 \\ -5 * x + 4, & \quad a = -5, \quad b = 4 \\ \frac{2}{3} * x + \frac{3}{5}, & \quad a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{5} \\ -\frac{13}{15} * x - \frac{25}{71}, & \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{25}{71} \\ 35 * x - 57, & \quad a = 35, \quad b = -57 \end{aligned}$$

Przykład 1.22 *Napisz wyrażenie algebraiczne liniowe o współczynnikach*

$$(i) \quad a = 5, \quad b = -25$$

$$(ii) \quad a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{2}{9}$$

$$(iii) \quad a = -\frac{13}{15}, \quad b = -\frac{15}{29}$$

1.3.4 Równanie liniowe

Równanie liniowe

$$a * x + b = 0$$

lub każde równanie, które można sprowadzić do tej postaci jest liniowe ze względu na niewiadomą x . Liczby a i b nazywamy współczynnikami równania liniowego.

Rozwiązaniem równania liniowego z niewiadomą x jest każda liczba, która podstawiona w miejsce x , spełnia to równanie.

Rozwiązanie równania liniowego otrzymujemy postępując według schematu:

- przenosimy liczby na prawą stronę zmieniając ich znak na przeciwny,
- niewiadomą x zostawiamy na lewej stronie
- dzielimy lub mnożymy przez współczynnik $a \neq 0$, żeby otrzymać współczynnik 1 przy zmiennej x .

Przykłady równań liniowych z rozwiązaniami.

$$\begin{aligned} 2 * x - 4 = 0, \quad x = 2, \quad 2 * 2 - 4 = 0, \quad a = 2, \quad b = -4 \\ -3 * x + 3 = 0, \quad x = 1, \quad -3 * 1 + 3 = 0, \quad a = -3, \quad b = 3 \\ \frac{3}{2} * x + \frac{3}{5} = 0, \quad x = -\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{2} * \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5} = 0, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Przykład 1.23 *Rozwiąż równanie liniowe*

$$2x - 1 = 0, \quad a = 2, \quad b = -1.$$

Rozwiązanie.

Przenosimy liczbę -1 na prawą stronę, zmieniając znak na przeciwny

$$2x = 1 \quad | : 2$$

Dzielimy przez współczynnik $a = 2$, żeby otrzymać x

W ten sposób znaleźliśmy rozwiązanie

$$x = \frac{1}{2}$$

Podstawiając do równania $x = \frac{1}{2}$, sprawdzamy, że otrzymane rozwiązanie spełnia to równanie.

Mianowicie dla $x = \frac{1}{2}$, mamy

$$2x - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Widzimy, że rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ spełnia to równanie.

Teraz podamy ogólny schemat rozwiązania równania liniowego.

$$a x + b = 0, \quad a \neq 0, \quad a x = -b, \quad x = -\frac{b}{a},$$

Zadanie 1.1 *Rozwiąż równanie*

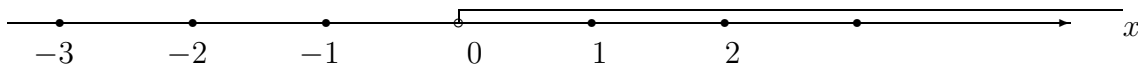
$$(i) \quad 3x - 12 = 0$$

$$(ii) \quad 5x + 20 = 10$$

$$(iii) \quad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8} = 1$$

1.3.5 Nierówności

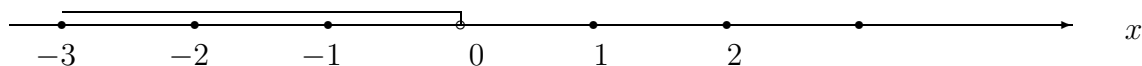
Zaznacz na osi liczbowej te wartości x które są większe od zera, nierówność $x > 0$ ostra, zero nie jest włączona.



Nierówność ostra wartości $x > 0$

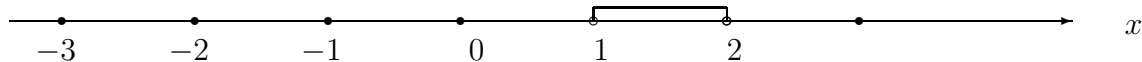
Zaznacz na osi liczbowej te wartości x , które są mniejsze od zera, nierówność

$x < 0$ ostra, zero nie jest włączona.



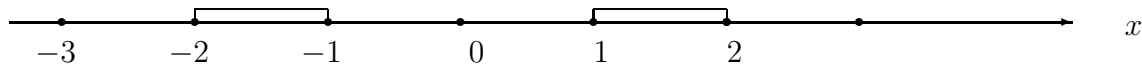
Nierówność ostra wartości $x < 0$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x , które leżą pomiędzy liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $1 < x < 2$ nierówność $1 < x < 2$ ostra, 1 i 2 nie są włączone.



Nierówność ostra wartości $1 < x < 2$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x , które leżą pomiędzy liczbą -2 i liczbą -1 lub liczbą 1 i liczbą 2, to znaczy $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$, nierówności słabe z włączeniem liczb -2, -1, 1, 2



Nierówność słaba $-2 \leq x \leq -1$ lub $1 \leq x \leq 2$

Zadanie 1.2 Rozwiąż nierówności

$$(i) \quad 2x - 1 > 1$$

$$(ii) \quad 4x - 6 \leq 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

Przykład 1.24 Rozwiąż nierówności

$$3(x - 1) < 2(x + 1)$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

Rozwiązanie

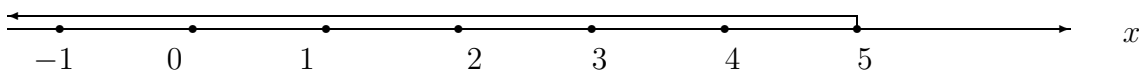
Wykonujemy mnożenia po lewej i po prawej stronie nierówności

$$3x - 3 < 2x + 2$$

Zawsze, przenosimy zmienną x na lewą stronę nierówności ze znakiem przeciwnym, natomiast liczby przenosimy na prawą stronę nierówności też ze znakiem przeciwnym

$$3x - 2x < 2 + 3, \quad x < 5$$

Na osi liczbowej zaznaczmy rozwiązanie $x < 5$ nierówności.



Nierówność ostra wartości $x < 5$

Zadanie 1.3 Rozwiąż nierówności

$$(i) \quad 3(3x - 1) - 2(2x + 1) < 4(x - 1)$$

$$(ii) \quad 3(x - 2) + 4(x + 2) \leq 2x + 10$$

Zaznacz na osi liczbowej te wartości x dla których nierówność jest prawdziwa.

1.4 Ułamki dziesiętne

Ułamki zwyczajne o mianownikach 10, 100, 1000 nazywamy ułamkami dziesiętnymi. Ułamki dziesiętne zapisujemy używając przecinka zamiast kreski.

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01, \quad \frac{1}{1000} = 0,001.$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} &= 0,3, & \frac{5}{100} &= 0,05, \\ \frac{35}{1000} &= 0,035 & \frac{735}{1000} &= 0,735, \\ 2\frac{3}{10} &= 2,3, & 10\frac{12}{100} &= 10,12. \end{aligned}$$

Mamy relacje odwrotne, ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwyczajne

$$\begin{aligned} 0,1 &= \frac{1}{10}, & 0,01 &= \frac{1}{100}, \\ 0,001 &= \frac{1}{1000}, & 0,3 &= \frac{3}{10}, \\ 0,05 &= \frac{5}{100}, & 0,035 &= \frac{35}{1000}, \\ 0,735 &= \frac{735}{1000}, & 2,3 &= \frac{3}{10}, \\ 10,12 &= 10\frac{12}{100}. \end{aligned}$$

Każdy ułamek zwyczajny możemy zamienić na ułamek dziesiętny. Pierwszy prosty sposób zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny polega na zapisaniu tego ułamka przy mianowniku, 10, 100, 1000, ... Ten sposób jest prosty tylko dla wybranych ułamków.

Przykład 1.25

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1 * 5}{2 * 5} = \frac{5}{10} = 0.1 \\ \frac{3}{4} &= \frac{3 * 25}{4 * 25} = \frac{75}{100} = 0.75 \\ \frac{7}{5} &= \frac{7 * 20}{5 * 20} = \frac{140}{100} = 1.4 \\ \frac{15}{250} &= \frac{15 * 4}{250 * 4} = \frac{60}{1000} = 0.06\end{aligned}$$

Drugi sposób zamiany ułamków zwyczajnych na dziesiętne polega na dzieleniu licznika przez mianownik.

Przykład 1.26 Zamień ułamek $\frac{1}{4}$ na ułamek dziesiętny.

Rozwiązanie. Dzielimy $1=1,00$ przez 4 . Zauważamy, że zera po przecinku nie zmieniają wartości 1

$$\begin{array}{r} 0,25 \\ \hline 1,00 : 4 \\ - 0 \\ \hline 10 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Odpowiedz: $\frac{1}{4} = 0,25$

Zadanie 1.4 Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny

- (i) $\frac{3}{5}$
- (ii) $\frac{37}{50}$
- (iii) $\frac{253}{250}$

Zadanie 1.5 Zamień ułamek zwyczajny na dziesiętny

- (i) $\frac{2}{15}$
(ii) $\frac{23}{45}$
(iii) $\frac{37}{150}$

1.4.1 Procenty i promile

$p\%$ procent to ułamek $\frac{p}{100}$ o mianowniku 100.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{100} = 0.01$ o mianowniku 100.

25% to ułamek $\frac{25}{100} = 0.25$ o mianowniku 100.

100% to całość $\frac{100}{100} = 1$.

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% * a = \frac{p}{100} * a$$

jako ułamek o liczniku p i o mianowniku 100 z a .

Przykład 1.27 Oblicz 15% z wartości $a=60$

$$15\% * 60 = \frac{15}{100} * 60 = \frac{15 * 60}{100} = \frac{15 * 6}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

Przykład 1.28 Oblicz 25% z wartości $a=3000$

$$25\% * 3000 = \frac{25}{100} * 3000 = \frac{25 * 3000}{100} = \frac{75000}{100} = 750$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a , obliczamy wartość a

Przykład 1.29 30% procent wartości a równa się 600. Oblicz wartość a

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{100} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{100}} = \frac{600 * 100}{30} = 2000$$

Zadanie 1.6 *Oblicz 75% z wartości $a = 2000$*

Zadanie 1.7 *Oblicz 15% z wartości $a = 4000$*

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a , oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 1.8 *50% procent wartości a równa się 800. Oblicz wartość a*

Zadanie 1.9 *30% procent wartości a równa się 5000. Oblicz wartość a*

Promile

Promile to ułamki o mianowniku 1000.

$p\%$ promili to ułamek $\frac{p}{1000}$ o mianowniku 1000.

Na przykład

1% jeden procent to ułamek $\frac{1}{1000} = 0.001$ o mianowniku 1000.

25% to ułamek $\frac{25}{1000} = 0.025$ o mianowniku 1000.

1000% to całość $\frac{1000}{1000} = 1$.

Obliczamy $p\%$ procent z wartości a

$$p\% * a = \frac{p}{1000} * a$$

jako ułamek o mianowniku 1000 z a .

Przykład 1.30 *Oblicz 15% z wartości $a=3000$*

$$15\% * 3000 = \frac{15}{1000} * 3000 = \frac{15 * 3000}{1000} = 45$$

Przykład 1.31 *Oblicz 25% z wartości $a=3000$*

$$25\% * 3000 = \frac{25}{1000} * 3000 = \frac{25 * 3000}{1000} = 75$$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ procent wartości a , obliczamy wartość a

Przykład 1.32 30%% procent wartości a równa się 600. Oblicz wartość a

Rozwiązanie.

$$30\% * a = 600, \quad \frac{30}{1000} * a = 600, \quad a = \frac{600}{\frac{30}{1000}} = \frac{600 * 1000}{30} = 20000$$

Zadanie 1.10 Oblicz 75%% z wartości $a = 2000$

Zadanie 1.11 Oblicz 15%% z wartości $a = 4000$

Odwrotnie, mając $p\% * a$ promili wartości a , oblicz wartość a podaną niżej w ćwiczeniach

Zadanie 1.12 50%% promili wartości a równa się 800. Oblicz wartość a

Zadanie 1.13 30%% promili wartości a równa się 5000. Oblicz wartość a

1.4.2 Procent składany

Wprowadźmy następujące oznaczenia

- K_0 - kapitał początkowy
- K_n - kapitał po n latach
- p - stopa procentowa w skali roku
- n - ilość lat oszczędności

Po pierwszym roku oszczędzania kapitał K_0 wzrośnie o $p\%$

$$K_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Po drugim roku oszczędności kapitał K_1 wzrośnie o $p\%$

$$K_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n - 1$ latach oszczędzania kapitał wzrośnie o $p\%$

$$K_{n-1} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

to po n latach oszczędzania

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \frac{p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach oszczędzania

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Przykład 1.1 Oblicz o ile wzrośnie kapitał 150000 PLN po 10 latach, jeżeli stopa procentowa $p = 5\%$.

Rozwiązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} = 150000 * 1.05^{10} = 150000 * 1.62889 = 244334 \text{ PLN}$$

Odpowiedź: Kapitał 150000 PLN wzrośnie przez 10 lat o 94334 PLN, jeżeli stopa procentowa w stosunku rocznym wynosi $p = 5\%$.

Splata kredytu. Podobnie obliczamy procent składany od kredytu.

Po pierwszym roku spłacania kapitał K_0 zmaleje o $p\%$

$$K_1 = K_0 - K_0 \frac{p}{100} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Po drugim roku spłacania kapitał K_1 zmaleje o $p\%$

$$K_2 = K_1 - K_1 \frac{p}{100} = K_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

Ogólnie, stosując zasadę indukcji zupełnej, jeżeli po $n - 1$ latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_{n-1} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{n-1}$$

to po n latach spłacania kapitał zmaleje do sumy

$$K_n = K_{n-1} - K_{n-1} \frac{p}{100} = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na końcowy kapitał po n latach spłacania kredytu.

$$K_n = K_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Przykład 1.2 Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału 150000 PLN po 10 latach spłacania. i po 150 latach spłacania, jeżeli stopa procentowa $p = 5\%$.

Rozwiązanie. Stosując wzór, obliczamy

$$K_{10} = 150000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10} = 150000 * 0.95^{10} = 150000 * 0.598737 = 89810 \text{ PLN}$$

$$K_{150} = 150000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{150} = 150000 * 0.95^{150} = 150000 * 0.0004555 = 68.33 \text{ PLN}$$

Odpowiedź: Po 10 latach kredyt zmaleje o 60189.5 PLN. Natomiast po 150 latach kredyt zmaleje o 149931.67 PLN.

Zadanie 1.14 Oblicz o ile zmaleje kredyt od kapitału 200000 PLN po 10 latach spłacania. i po 180 latach spłacania, jeżeli stopa procentowa $p = 5\%$.

1.5 Liczby rzeczywiste

Dotychczas poznaliśmy następujące zbiory liczb:

Nieskończony zbiór liczb naturalnych, nieskończony ponieważ liczb naturalnych jest tak dużo ile chcemy.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

Nieskończony zbiór liczb całkowitych

$$C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Ktoś by pomyślał, że liczb całkowitych jest dwa razy więcej niż liczb naturalnych. Otóż nie, liczb całkowitych jest tyle samo co liczb naturalnych, to jest ta sama nieskończoność.

Nieskończony zbiór liczb wymiernych, czyli zbiór wszystkich możliwych ułamków

$$W = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in C, q \neq 0 \right\}$$

Liczb wymiernych jest również tyle samo co liczb naturalnych, to jest ta sama nieskończoność.

Pierwiastek kwadratowy.

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby wymiernej nieujemnej $a \geq 0$, nazywamy liczbę $b \geq 0$ też nie ujemną, taką, że

$$b^2 = a$$

Wtedy piszemy

$$\sqrt{a} = b$$

Na przykład

$$\text{dla } a = 4, b = 2, \quad \sqrt{4} = 2, \quad \text{bo } 2^2 = 4,$$

$$\text{dla } a = 9, b = 3, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \text{bo } 3^2 = 9,$$

$$\text{dla } a = \frac{4}{9}, b = \frac{2}{3}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \quad \text{bo } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ziór liczb rzeczywistych zawiera wszystkie liczby wymierne i jest istotnie większy od wszystkich zbiorów liczbowych, to znaczy, że liczb rzeczywistych jest więcej niż nieskończoność.

Poznajmy, liczby rzeczywiste, które nie są liczbami naturalnymi, ani liczbami całkowitymi, ani liczbami wymiernymi. Taką liczbą rzeczywistą jest pierwiastek kwadratowy z liczby 2.

Rzeczywiście, jeżeli liczba $\sqrt{2}$ byłaby wymierna, to istniałyby liczby całkowite $p \in C$ i $q \in C$ takie, że

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0.$$

gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to znaczy liczby p i q nie mają wspólnego dzielnika. Zatem, mamy

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2, \quad 2 = \frac{p^2}{q^2}, \quad 2 * q^2 = p^2$$

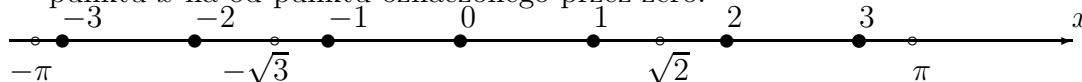
Z równości $2 * q^2 = p^2$ wynika, że liczba p^2 jest podzielna przez 2. To znaczy, że liczba p też jest podzielna przez 2. Wtedy $p = 2 * k$ dla pewnego całkowitego $k \in C$.

Zatem, mamy

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad q^2 = 2k^2$$

Teraz $q^2 = 2k^2$ jest liczbą parzystą i podzielną przez 2. To znaczy, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest skraccalny. To przeczy istnieniu liczb całkowitych p, q . Dlatego liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, natomiast jest liczbą rzeczywistą.

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy literą R . Zbiór liczb rzeczywistych jest rozszerzeniem zbioru liczb wymiernych o liczby, niewymierne takie jak $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$; Zatem zachodzi następująca relacja: $W \subset R$. W istocie, liczb rzeczywistych niewymiernych jest "dużo"¹ więcej niż liczb wymiernych. Zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty ze względu na cztery operacje arytmetyczne. Liczby rzeczywiste podobaobnie jak liczby naturalne, całkowite i wymierne interpretujemy jako punkty na osi liczbowej. Dokładniej, liczba x oznacza odległość punktu x na od punktu oznaczonego przez zero.



Oś liczbową. Liczby rzeczywiste

1.5.1 Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna liczby to odległość punktu x od początku układu oznaczonego przez 0. Zatem, wartość bezwzględna liczby x jest zawsze nieujemna.

Definition 1.1 *Wartość bezwzględną liczby x określamy jak następuje:*

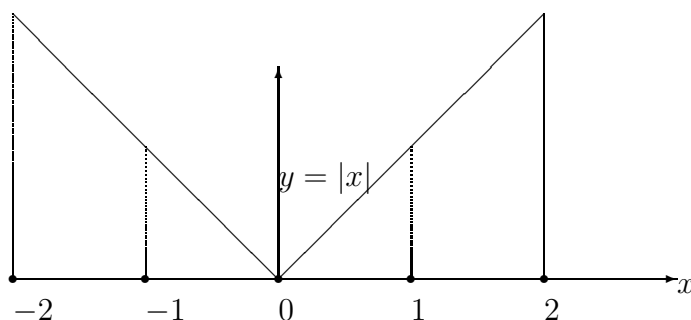
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

¹Doód, Teoria Liczb, W. Sierpiński

Na przykład $|5| = 5$ bo $5 > 0$, również $|-5| = -(-5) = 5$, gdy $x = -5 < 0$.
Również wartość bezwzględna liczby x jest dana wzorem

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Zauważmy, że $\sqrt{4} = 2$, nigdy -2 .



Wykres wartości bezwzględnej $y = |x|$

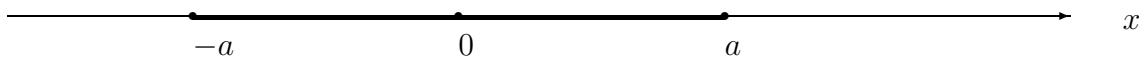
Odcinek na osi liczbowej. Z definicji wartości bezwzględnej liczby x , wynika nierówność

$$|x| \leq a, \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -a \leq x \leq a, \quad a \geq 0.$$

Rzeczywiście, zauważamy, że

$$|x| \leq a, \quad \text{gdy} \quad x \leq a \quad \text{i} \quad -x \leq a, \quad \text{to znaczy} \quad -a \leq x \leq a.$$

Na osi liczbowej zaznaczmy zbiór liczb x , które spełniają $-a \leq x \leq a$



Odcinek na osi liczbowej $|x| \leq a$.

Podobnie, odcinek $[a, b]$ o początku w punkcie a i końcu w punkcie b , to jest zbiór punktów x leżących pomiędzy punktami a i b zapisujemy jak następuje:

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

Długość odcinka $[a, b]$, to jest odległość punktu a od punktu b , równa się wartości bezwzględnej różnicy $|b - a|$.

Przykład 1.3 Rozwiąż równanie

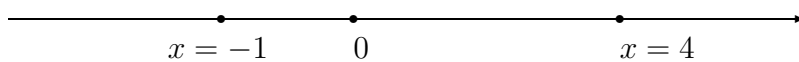
$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzględnej

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 = 5, & \text{gdy } 2x - 3 \geq 0, & \text{to } x = 4, \\ -(2x - 3) = 5 & \text{gdy } -2x + 3 \leq 0, & \text{to } x = -1, \end{cases}$$

Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$ podane jest niżej na osi liczbowej.



Rozwiązanie $x = -1$ lub $x = 4$.

Przykład 1.4 *Rozwiąż nierówność*

$$|x - 3| \leq 2.$$

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzględnej nierówność

$$|x - 3| \leq 2.$$

jest równoważna z podwójną nierównością

$$-2 \leq x - 3 \leq 2, \quad \text{lub} \quad 1 \leq x \leq 5.$$

Odpowiedź: $1 \leq x \leq 5$.

Przykład 1.5 *Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność*

$$|x - 1| + |x + 1| \leq 1.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej.

Rozwiązanie. Z definicji wartości bezwzględnej znajdujemy

$$1. \text{ dla } x - 1 \leq 0, \quad |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x, \quad |x + 1| = -(x + 1) = -1 - x$$

$$|x - 1| + |x + 1| = 1 - x - 1 - x = -2x \leq 1,$$

$$\text{gdy } x \geq -\frac{1}{2},$$

$$2. \text{ dla } -1 \leq x \leq 1, \quad |x - 1| = (x - 1) = x - 1, \quad |x + 1| = -(x + 1) = -1 - x$$

$$|x - 1| + |x + 1| = x - 1 - 1 - x = -2 \leq 1,$$

$$\text{gdy } -1 \leq x \leq 1$$

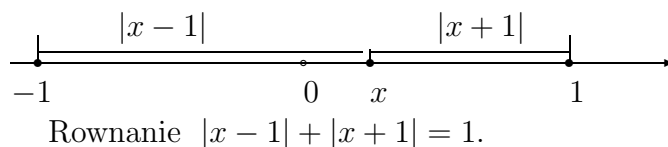
$$3. \text{ dla } x + 1 \geq 0, \quad |x - 1| = x - 1, \quad |x + 1| = x + 1$$

$$|x - 1| + |x + 1| = (x - 1) + (x + 1) = 2x \leq 1,$$

$$\text{gdy } x \leq \frac{1}{2},$$

Odpowiedź: Nierówność jest spełniona dla $-1 \leq x \leq 1$. To znaczy dla wszystkich x takich, że $|x| \leq 1$.

Również zauważmy, że odległość punktu $x \in [-1, 1]$ od punktu -1 plus odległość tego punktu $x \in [-1, 1]$ od 1 równa się 1 . Zatem nierówność jest spełniona również dla $x = -1$ lub $x = 1$, wtedy zachodzi znak równości. Zaznaczmy to rozwiązanie na rysunku.



Zadanie 1.15 Rozwiąż równanie

$$|3x - 5| = 4.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.16 Rozwiąż równanie

$$|2x - 3| = 5.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.17 Rozwiąż nierówność

$$|x - 5| \leq 2.$$

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej.

Zadanie 1.18 Podaj zbiór punktów, które spełniają nierówność

$$|x| + |x - 2| \leq 2.$$

Zaznacz ten zbiór na osi liczbowej

1.5.2 Wyrażenia algebraiczne w zbiorze liczb rzeczywistych

Wyrażenia arytmetyczne i algebraiczne w zbiorze liczb rzeczywistych budowane są na tych samych zasadach jak w liczbach wymiernych. Mianowicie, przypomnijmy określenie wyrażenia arytmetycznego i algebraicznego

Definition 1.2 Wyrażeniem arytmetycznym nazywamy liczby połączone operacjami arytmetycznymi $+$, $-$, $*$, $/$, potęgowaniem o wykładnikach wymiernych i nawiasami wyznaczającymi kolejność wykonywania tych działań.

W poprzednim paragrafie podaliśmy przykłady obliczeń wyrażeń arytmetycznych. Niżej podajemy kilka wyrażeń arytmetycznych w liczbach rzeczywistych

$$5 * 3 + 4 * 8 - 15, \quad \frac{2}{3} + 2^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\frac{1}{3} + \sqrt[3]{5}}{1 + \sqrt{2^3}}, \quad \frac{3^3 * 3^5 + (\frac{1}{3})^{-4} * 27^3}{9[3^2 + (\frac{1}{3})^{-4} * 3^3]}$$

Definicja wyrażeń algebraicznych różni się od definicji wyrażeń arytmetycznych tym że wyrażenia te zawierają też zmienne oznaczone literami.

Definition 1.3 *Wyrażeniem algebraicznym nazywamy liczby lub litery połączone operacjami arytmetycznymi $+$, $-$, $*$, $/$, potęgowaniem o wykładnikach wymiernych i nawiasami wyznaczającymi kolejność wykonywania tych działań.*

W poprzednim paragrafie podaliśmy przykłady obliczeń wyrażeń arytmetycznych. Niżej dla przykładu napiszmy kilka wyrażeń arytmetycznych

$$5a * 3b + 4 * 8c - 15x, \quad \frac{2a}{3} + 2^{\frac{2}{3}}b * c, \quad \frac{\frac{1}{3}a * b + c\sqrt[3]{5}}{2x + y\sqrt{2^3}}, \quad \frac{3^3 * 3^5 a * b + (\frac{1}{3})^{-4} * 27^3}{9[3^2 + (\frac{1}{3})^{-4} * 3^3 x * y * z]}$$

Jeżeli w wyrażeniach algebraicznych podstawimy liczby za zmienne, wtedy otrzymujemy wyrażenie arytmetyczne. W powyższych przykładach, jeżeli za zmienne podstawimy wartości $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ to otrzymamy wyrażenia arytmetyczne.

Przykład 1.6 *Uprość wyrażenie*

$$\frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1), \quad a > 1.$$

Rozwiązanie. Wykonując działania arytmetyczne, obliczmy

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - a}{a - 1} - (a + 1) &= \frac{(a^2 - a) - (a - 1)(a + 1)}{a - 1} \\ &= \frac{(a^2 - a) - [a(a + 1) - 1(a + 1)]}{a - 1} \\ &= \frac{a^2 - a - [a^2 + a - a - 1]}{a - 1} \\ &= \frac{a^2 - a - a^2 + 1}{a - 1} \\ &= \frac{1 - a}{a - 1} = -\frac{1 - a}{1 - a} = -1. \end{aligned}$$

W następnym paragrafie podajemy wzory uproszczonego mnożenia, które są wyrażeniami algebraicznymi szczególnej postaci.

1.5.3 Ciąg arytmetyczne i szereg arytmetyczny.

Wyrażenia postaci

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, a_0 + 3r, \dots, a_0 + n r; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

nazywamy ciągiem arytmetycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $r \in R$ jest różnicą ciągu.

Zatem wyraz ogólny ciągu a_n można zapisać wzorem

$$a_n = a_0 + n r, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu wynosi

$$a_{n+1} - a_n = a_0 + (n+1)r - (a_0 + n r) = r, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Na przykład, ciąg kolejnych liczb naturalnych

$$0, 1, 2, \dots;$$

jest ciągiem arytmetycznym o wyrazie pierwszym $a_0 = 0$, różnicy $r = 1$ i o wyrazie ogólnym $a_n = n$.

Średnia Arytmetyczna. Zauważmy, że wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Rzeczywiście, obliczamy

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_0 + (n-1)r) + (a_0 + (n+1)r)}{2} = \frac{2a_0 + 2nr}{2} = a_n$$

Również sumy dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i o liczbę k od a_n

$$a_0 + a_n = a_k + a_{n-k}$$

są równe dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots, n$, mamy

$$a_k + a_{n-k} = \underbrace{a_0 + kr}_{a_k} + \underbrace{a_0 + (n-k)r}_{a_{n-k}} = a_0 + \underbrace{a_0 + nr}_{a_n} = a_0 + a_n.$$

Przykład 1.7 *Sprawdź czy następujący ciąg jest arytmetyczny*

$$(i) \quad a_n = \frac{3n+1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy różnica r kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy jest niezależna od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{\frac{3(n+1)+1}{3}}_{a_{n+1}} - \underbrace{\frac{3n+1}{3}}_{a_n} = \frac{3n+1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3n+1}{3} = \frac{1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg jest arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu jest stała $r = \frac{1}{3}$ i nie zależy od $n = 0, 1, 2, \dots$;

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy różnica kolejnych wyrazów ciągu jest stała, to znaczy niezależny od n

$$r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{1 + (n+1)^2}_{a_{n+1}} - \underbrace{(1+n^2)}_{a_n} = 1 + n^2 + 2n + 1 - (1 + n^2) = 1 + 2n,$$

Odpowiedź: Widzimy, że ciąg (ii) nie jest ciągiem arytmetyczny, gdyż różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu $r = 2n + 1$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$; zależy od n .

Zadanie 1.19 Sprawdź czy następujący ciąg jest artmetyczny

$$(i) \quad a_n = \frac{8n+1}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = 1 + 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, :$$

Postęp Arytmetyczny. Postępem arytmetycznym nazywamy sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

lub

$$a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \dots + (a_0 + nr),$$

W sigma notacji zapisujemy szereg arytmetyczny jako następującą sumę:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

lub

$$\sum_{k=0}^n (a_0 + kr) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \dots + (a_0 + nr).$$

Łatwo wyprowadzić wzór na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. Mianowicie, oznaczmy sumę przez

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Napiszmy tą sumę w odwrotnej kolejności dodawania wyrazów

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

Dodając stronami, otrzymamy

$$2S_n = (a_0 + a_n) + (a_1 + a_{n-1}) + (a_2 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_1) + (a_n + a_0)$$

Ponieważ, wyrazy postępu arytmetycznego spełniają równość

$$a_0 + a_n = a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_0$$

dlatego, suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$2S_n = (n+1)(a_0 + a_n)$$

lub

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nr).$$

Przykład 1.8 *Oblicz sumę postępu arytmetycznego*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że w tym postępie arytmetycznym pierwszy wyraz $a_0 = 0$ i różnica $r = 1$.

Stosując powyższy wzór, znajdujemy sumę

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(2a_0 + nr) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zadanie 1.20 *Oblicz sumę n wyrazów postępu arytmetycznego o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{3n+5}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

1.5.4 Ciągi geometryczne i postępy geometryczne.

Wyrażenie postaci

$$a_0, a_0q, a_0q^2, a_0q^3, \dots, a_0q^n \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

nazywamy ciągiem geometrycznym, gdzie $a_0 \in R$ jest pierwszym wyrazem ciągu i $q \in R$ jest ilorazem ciągu.

Zatem wyraz ogólny ciągu geometrycznego zapisujemy wzorem

$$a_n = a_0q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Zakładamy nie trywialny przypadek gdy $a_0 \neq 0$, $q \neq 0$.

Iloraz dwóch kolejnymi wyrazów ciągu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Na przykład, ciąg liczb

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$$

o wyrazie pierwszym $a_0 = 1$, ilorazie $q = 2$ i o wyrazie ogólnym $a_n = 2^n$ jest ciągiem geometrycznym. Zauważmy, że gdy iloraz $q = 0$ to ciąg geometryczny jest o wyrazie ogólnym stałym $a_n = a_0$ dla każdego $n = 1, 2, \dots$;

Średnia Geometryczna. Zauważmy, że wartość bezwzględna wyrazu ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego

$$|a_n| = \sqrt{|a_{n-1}a_{n+1}|}$$

Rzeczywiście, obliczamy

$$a_{n-1} * a_{n+1} = a * q^{n-1} * a * q^{n+1} = a^2 * q^{2n} = a_n^2.$$

Skąd wynika średnia geometryczna

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} * a_{n+1}}$$

Również iloczyny dwóch wyrazów odległych o liczbę k od a_0 i liczbę k od a_n

$$a_0 * a_n = a_k * a_{n-k}$$

są równe dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

Mianowicie, sprawdzamy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$a_k * a_{n-k} = \underbrace{a_0 * q^k}_{a_k} * \underbrace{a_0 * q^{n-k}}_{a_{n-k}} = \underbrace{a_0(a_0 q^n)}_{a_0 * a_n} = a_0 * a_n.$$

Przykład 1.9 Sprawdź czy następujący ciąg o danym wyrazie ogólnym jest geometryczny

$$(i) \quad a_n = \frac{3^n}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad a_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, :$$

Rozwiązanie (i). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\right) : \left(\frac{3^n}{2^n}\right) = \frac{3^{n+1} * 2^n}{2^{n+1} * 3^n} = \frac{3}{2} = q, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu jest stały i nie zależy od n , $q = \frac{3}{2}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$;

Rozwiązanie (ii). Sprawdzamy czy iloraz q kolejnych wyrazów ciągu jest stały, to znaczy jest niezależny od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

Odpowiedź: Ciąg nie jest geometryczny, gdyż iloraz kolejnych wyrazów ciągu $q = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ dla $n = 1, 2, \dots$; zależy od n .

Zadanie 1.21 Sprawdź czy następujący ciąg jest geometryczny.

$$(i) \quad \frac{(\sqrt{2})^n}{5^n}, \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(ii) \quad \sqrt{n}, \dots \quad n = 1, 2, \dots;$$

Zadanie 1.22 Podaj pierwszy wyraz, n -ty wyraz i oblicz iloraz ciągu geometrycznego

$$(i) \quad \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3^2}{5}, \frac{3^3}{5}.$$

$$(ii) \quad \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots :$$