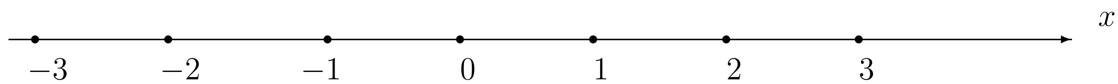
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Oś liczbowa. Liczby całkowite

MATEMATYKA
W SZKOLE HELIANTUS
LICZBY NATURALNE I CAŁKOWITE

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

WARSZAWA 2018[1]

[1] Projekt pierwszy

Contents

1 Liczby naturalne i całkowite **5**
1.1 Liczby naturalne . . . 5
1.1.1 Ćwieczenia . . . 6
1.2 Liczby całkowite . . . 7
1.2.1 Liczby parzyste, nieparzyste . . . 7
1.2.2 Ćwiczenia . . . 8
1.2.3 Potęga liczb naturalnych . . . 12
1.2.4 Testy podzielności liczb naturalnych . . . 14
1.2.5 Dzielenie liczb przez liczby jednocyfrowe z resztą . . . 16
1.2.6 Dzielenie liczb przez liczby dwucyfrowe z resztą . . . 17
1.2.7 Zadania . . . 19

Chapter 1

Liczby naturalne i całkowite

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50000 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryć.
Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych greków w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-2675 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)
Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych prac publikowanych w wiodących pisamach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu systemów komputerowych w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytmów dla potrzeb administracji i programów społecznych.

1.1 Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczmy symbolem

$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.1}$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.2}$$

Oczywiste własności zbiorów N_+ i N.
Zbiór N_+ zawarty jest w zbiorze N, piszemy $N_+ \subset N$.
Suma liczb naturalnych $n + m$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $n, m \in N$ ich suma

$$n + m \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy ze zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.
Na przykład dla $n = 5,\ m = 7$, mamy

$$n + m = 5 + 7 = 12 \in N$$

jest liczbą naturalną.
Operacja dodawania jest przemienna, to znaczy, dla dowolnych liczb naturalnych n, m suma

$$n + m = m + n$$

Na przykład $3 + 5 = 5 + 3 = 8 \in N$
Podobnie zbiór liczb naturalnycj jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienna
Iloczyn liczb naturalnych $n * m$ jest liczbą naturalną.
Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $n, m \in N$ ich iloczyn

$$n * m \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.
Na przykład dla $n = 5,\ m = 7$, mamy

$$n * m = 5 * 7 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienna, to znaczy, dla dowolnych liczb naturalnych n, m iloczyn

$$n * m = m * n$$

Wynik odejmowania lub dzielenia liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.

1.1.1 Ċwieczenia

Przykład 1.1 *Oblicz sumę kolejnych* 10 *liczb naturalnych*

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ S_{10} & = & 10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 \\ --- & ... & ------------------ \\ 2 * S_{10} & = & \underbrace{11+11+11+11+11+11+11+11+11+11}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10 * 11 : 2 = 55$$

Przykład 1.2 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb naturalnych*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_n & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ S_n & = & n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 \\ --- & ... & ------------------ \\ 2 * S_n & = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

1.2 Liczby całkowite

Zbiór liczb całkowitych jest rozszerzeniem zbioru liczb naturalnych o zbiór liczb naturalnych ujemnych. Zbiór liczb całkowitych oznaczmy literą C i zapisujemy jak następuje:

$$C = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$$

Zbiór liczb całkowitych jest zamknięty ze względu na trzy operacje arytmetyczne doddawanie, odejmowanie i mnożenie. Zatem, dla dowolnych liczb całkowitych $a, b \in C$, ich suma $a + b \in C$, różnica $a - b \in C$ i iloczyn $a * b \in C$ są liczbami całkowitymi.
Na przykład,

$$-3 + 5 = 2 \in C, \quad 6 - 8 = -3 \in C, \quad (-11) * 3 = -33 \in C$$

Również, w zbiorze liczb całkowitych operacje dodawania i mnożenia są przemienne, to znaczy

$$a + b = b + a, \quad a * b = b * a, \quad \text{dla dowolnyc} \quad a, b \in C$$

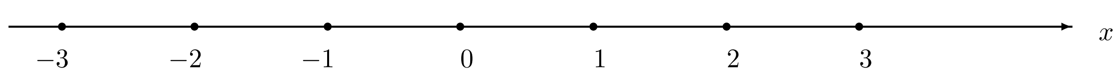
Na przykład

$$-4 + 6 = 6 - 4 = 2, \quad (-3) * (-5) = (-5) * (-3) = 15$$

Natomiast, operacja odejmowania nie jest przemienna, gdyż na przykład

$$7 - 3 = 4 \ \text{ale} \ 3 - 7 = -4.$$

Na osi liczbowej, liczby całkowite zaznaczamy punktami położonymi w równej odległości, liczby ujemne na lewo od O, liczby dodatnie na prawo od 0.



Oś liczbowa. Liczby całkowite

1.2.1 Liczby parzyste, nieparzyste

Zbiór liczb naturalnych składa się z dwóch podzbiorów liczb parzystych i liczb nieparzystych. **Liczby parzyste** zapisujemy wzorem

$$n = 2k \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Mamy więc ciąg nieskończony liczb parzystych

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...,$$

Liczby nieparzyste. Podobnie, liczby nieparzyste zapisujemy wzorem

$$n = 2k + 1, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Zatem mamy ciąg nieskończony liczb nieparzystych

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...,$$

Zauważamy, że liczby parzyste dzielą się przez 2, natomiast liczby nieparzyste dzielą się przez 2 z resztą 1.

1.2.2 Ćwiczenia

Przykład 1.3 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2,$$

Ich suma

$$(2n-2)+2n+(2n+2)=6n=84$$

Obliczamy n:

$$6n=84, \qquad n=84:6=14$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$\begin{array}{l} 2n-2=2*14-2=26, \\ 2n=2*14=28, \\ 2n+2=2*14+2=30 \end{array}$$

Sprawdzenie: Obliczamy sumę trzech kolejnych liczb parzystych

$$26+28+30=84.$$

Przykład 1.4 *Ile różnych liczb parzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1,2,3,4,5,6,7$*?*

Rozwiązanie:
Liczby parzyste utworzone z cyfr $1,2,3,4,5,6,7$ mają trzy cyfry jedności
2 lub 4 lub 6
Napiszmy wszystkie różne liczby parzyste dwucyfrowe, które mają cyfrę jedności 2 lub 4 lub 6

12	14	16
22	24	26
32	34	36
42	44	46
52	54	56
62	64	66
72	74	76

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 2

112	212	312	412	512	612	712
122	222	322	422	522	622	722
132	232	332	432	532	632	732
142	242	342	442	542	642	742
152	252	352	452	552	652	752
162	262	362	462	562	662	762
172	172	372	472	572	672	772

Niżej podadane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 4

114	214	314	414	514	614	714
124	224	324	424	524	624	724
134	234	334	434	534	634	734
144	244	344	444	544	644	744
154	254	354	454	554	654	754
164	264	364	464	564	664	764
174	174	374	474	574	674	774

Niżej podane są wszystkie różne liczby parzyste trzycyfrowe, które mają cyfrę jedności 6

116	216	316	416	516	616	716
126	226	326	426	526	626	726
136	236	336	436	536	636	736
146	246	346	446	546	646	746
156	256	356	456	556	656	756
166	266	366	466	566	666	766
176	176	376	476	576	676	776

Teraz liczymy wszystkie liczby parzyste utworzone z cyfr 1,2,3,4,5,6,7 W tabeli pierwszej z cyfrą jedności 2 jest ich 7*7=49
Podobnie, w tabeli drugiej z cyfrą jedności 4 jest ich 7*7=49
oraz w tabeli trzeciej z cyfrą jedności 6 jest ich 7*7=49
Zatem razem w trzech tabelach jest różnych liczb parzystych

$$7 * 7 * 3 = 49 * 3 = 147$$

Przykład 1.5 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n + 1, \quad 2n + 3, \quad 2n + 5.$$

Ich suma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9 = 51.$$

Obliczamy n:

$$6n + 9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42 : 6 = 7.$$

Obliczmy trzy kolejne liczby nieparzyste

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= 2 * 7 + 1 = 15, \\ 2n + 3 &= 2 * 7 + 3 = 17, \\ 2n + 5 &= 2 * 7 + 5 = 19. \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych

$$15 + 17 + 19 = 51.$$

Przykład 1.6 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{20} & = & 2 + 4 + +6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 \\ S_{20} & = & 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 \\ --- & ... & ---------------------- \\ 2 * S_{20} & = & \underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22}_{10 \ skladnikow \ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{20} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{20} = 10 * 22 : 2 = 110 \quad \text{lub} \ \mathrm{S}_{20} = \frac{10 * 22}{2} = 110$$

Przykład 1.7 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb parzystch*

$$S_n = 2 + 4 + \cdots + (2n-2) + 2n$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc}
S_{2n} & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots + & 2n-2+ & 2n \\
S_{2n} & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots + & 4+ & 2 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2*S_{2n} & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots + & (2n+2)+ & (2n+2) \\
 & & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n}.

$$S_{2n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{20}

$$S_{20} = \frac{10*22}{2} = 10*11 = 110$$

Przykład 1.8 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{19} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_{19} & = & 1\ \ +3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\
S_{19} & = & 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1 \\
--- & ... & ------------------ \\
2*S_{19} & = & \underbrace{20+20+20+20+20+20+20+20+20+20}_{10\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{19} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{19} = 10*20:2 = 100 \quad \text{lub S}_{19} = \frac{10*20}{2} = 100$$

Przykład 1.9 *Podaj wzór ogólny na sumę n kolejnych liczb nieparzystch*

$$S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

Podaj przykład zastosowania tego wzoru.używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccccccc}
S_{2n-1} & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots + & (2n-3)+ & (2n-1) \\
S_{2n-1} & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots + & 3+ & 1 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2 * S_{2n-1} & = & \multicolumn{6}{c}{\underbrace{2n+ \quad 2n+ \quad 2n+ \quad \cdots + \quad 2n+ \quad 2n}_{n\ skladnikow\ sumy}}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{2n-1}.

$$S_{2n-1} = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{19}

$$S_{19} = 10 * 10 = 100$$

Przykład 1.10 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1$$

jest podzielne przez 12 *dla każdej liczby nieparzystej* a.

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba a jest nieparzysta to dla pewnego n

$$a = 2 * n - 1$$

gdyż dla każdej liczby nieprazystej jest naturalne n, takie że

$$a = 2 * n - 1$$

Podstawiając do tego wyrażenia algebraicznego

$$a = 2 * n - 1$$

otrzymamy

$$\begin{array}{ll}
 & a^2 + (a+2)(a+2) + (a+4)(a+4) + 1 = \\
= & (2*n-1)(2*n-1) + (2*n-1+2)(2*n-1+2)+ \\
+ & 2*n-1+4)(2*n-1+4) + 1 = \\
= & (4*n*n - 4*n + 1) + (2*n+1(2*n+1)+ \\
+ & (2*n+3)(2*n+3) + 1 = \\
= & (4*n^2 - 4*n + 1) + (4*n^2 + 4*n + 1) + (4*n^2 + 12*n + 9) = \\
= & 12*n^2 + 12*n + 12 = \\
= & 12*(n^2 + n + 1)
\end{array}$$

Dla każdej nieparzystej liczby $a = 2 * n - 1$ to wyrażenie rozkłada się na czynniki 12 razy (n^2+n+1). Zatem to wyrażenie algebraiczne jest podzielne przez 12 dla każdej nieparzystej wartości parametru a.

Zadanie 1.1 *Ile różnych liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*?*

Zadanie 1.2 *Oblicz sumę kolejnych* 15 *liczb naturalnych*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.3 *Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych*

$$S_{19} = 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$$

stosując wzór na sumę n kolejnych liczb naturalnych.

Zadanie 1.4 *Suma trzech kolejnych liczb naturalnych równa jest 45. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.5 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 120. Znajdź te liczby.*

Zadanie 1.6 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. Znajdź te liczby.*

1.2.3 Potęga liczb naturalnych

Mnożąc liczbę naturalną przez siebie kilka razy obliczamy jej potęgę.
Na przykład, mnożąc liczbę 2 otrzymamy jej kolejne potęgi

$$\begin{array}{lcl} 2^0 & = & 1 \\ 2^1 & = & 2 \\ 2*2 & = & 2^2 = 4 \\ 2*2*2 & = & 2^3 = 8 \\ 2*2*2*2 & = & 2^4 = 16 \end{array}$$

Podobnie, mnożąc liczb 3 przez siebie otrzymamy kolejne jej potęgi

$$\begin{array}{lcl} 3^0 & = & 1 \\ 3^1 & = & 3 \\ 3*3 & = & 3^2 = 9 \\ 3*3*3 & = & 3^3 = 27 \\ 3*3*3*3 & = & 3^4 = 81 \\ 3*3*3*3*3 & = & 3^5 = 243 \end{array}$$

Każda liczba podniesiona do potęgi 0 równą jest 1
Na przykład

$$1^0 = 1, \quad 5^0 = 1, \quad 6^0 = 1, \quad 7^0 = 1, \quad 14^0 = 1, \quad 259^0 = 1$$

Ogólnie, potęgą liczby naturalnej a o wykładniku naturalnym dodatnim n nazywamy iloczyn tej liczby pomnożonej przez siebie n razy i zapisujemy

$$\begin{array}{ll} a^0 = 1, & 2^0 = 1 \\ \underbrace{a*a...*a}_{n-czynnikow} = a^n, & \underbrace{2*2...*2}_{n-czynnikow} = 2^n \end{array}$$

Wtedy a nazywamy podstawą i n wykładnikiem potęgi a^n.

Przykład 1.1 *Oblicz potęgi*

$$\begin{array}{llllllll} 4^0 & = & , & 4^1 & = & , 4^2 & = \\ 5^2 & = & , & 5^3 & = & , 5^4 & = \\ 10^2 & = & , & 10^3 & = & , 10^4 & = \end{array}$$

Operacje arytmetyczne na potęgach. Na potęgach następujące operacje są wykonalne:

1. Mnożenie potęg o tych samych podstawach
$$a^p * a^q = a^{p+q}$$
dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 3,\ q = 5$ mamy
$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

2. Dzielenie potęg o tych samych podstawach
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$
dla dowolnych liczb p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 5,\ q = 3$ mamy
$$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

3. Potęgowanie potęg o tych samych podstawach
$$(a^p)^q = a^{p*q},$$
dla dowolnych p, q.
Na przykład dla $a = 2,\ p = 2,\ q = 3$ mamy
$$(2^3)^2 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

4. Potęga iloczynu liczb o tym samym wykładniku
$$(a * b)^n = a^n * b^n$$
równa jest iloczynowi potęg.
Na przykład dla $a = 2,\ b = 3,\ n = 3$ mamy
$$(2 * 3)^3 = 2^3 * 3^3 = 8 * 27 = 216$$

5. Potęga ilorazu liczb o tym samym wykładniku
$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$
równa jest ilorazowi potęg.
Na przykład dla $a = 4,\ b = 2,\ n = 3$ mamy
$$(4 : 2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8 \quad \text{lub} \quad (\frac{4}{2})^3 = \frac{4^3}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

Przykład 1.11 *Oblicz*
$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3}$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy
$$\frac{2^3 * 3^4}{2^2 * 3^3} \quad = \quad 2 * 3 = 6$$

Zadanie 1.7 *Oblicz*

$$5^2 * 2^3 + 3^2 * 2^3 - 4^2 * 5^2 =$$

Rozwiązanie. Wykonując działania na potęgach obliczmy

$$2^3 * 3^2 + 5^2 * 7^2$$

Zadanie 1.8 *Oblicz*

$$\frac{3^3 * 2^3 - 3^2 * 2^2}{3 * 2^3 + 2 * 3}$$

Odp:6

1.2.4 Testy podzielności liczb naturalnych

- Pierwszy test podzielniści:
  Liczby parzyste
  $$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...;$$
  zapisujemy w postaci ogólnej
  $$n = 2k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
  Te liczby są podzielne przez 2
  Obliczmy
  $$2 * k : 2 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{2 * k}{2} = k$$
  dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

  Przykład 1.2
  $$124 : 2 = 62, \qquad \text{lub} \quad \frac{124}{2} = 62$$
  $$316 : 2 = 158, \quad \text{lub} \quad \frac{2528}{2} = 1264$$

- Drugi test podzielności
  Liczby podzielne przez 3
  $$0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...;$$
  zapisujemy w postaci ogólnej
  $$n = 3k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
  Te liczby są podzielne przez 3
  Obliczmy
  $$3 * k : 3 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{3 * k}{3} = k$$
  dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

  Podzielnośc liczby n przez 3 poznajemy używając testu:

  Liczba n jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli suma cyfr liczby n dzieli się przez 3.

Przykład 1.3 *Liczba* $n = 54$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $5 + 4 = 9$ *jest podzielna przez 3.*

$$54 : 3 = 18, \quad \text{bo} \quad 3 * 18 = 54$$

Podobnie,

Przykład 1.4 *Liczba* $n = 756$ *jest podzielna przez 3, ponieważ jej suma cyfr* $7+5+6 = 18$ *jest podzielna przez 3.*

$$756 : 3 = 252 \quad \text{bo} \quad 3 * 254 = 756$$

Test podzielności liczby $n = a_1 a_0$ przez 3 ma proste uzasadnienie dla liczb dwucyfrowych. Liczba dwucyfrowa ma cyfrę dziesiątek a_1, i drugą cyfrę jedności a_0.

$$a_1 a_0 = a_1 * 10 + a_0 = a_1(9 + 1) + a_0 = 9 * a_1 + a_1 + a_0$$

Pierwszy składnik $9 * a_1$ dzieli się przez 3 bo

$$9 * a_1 : 3 = 3a_1, \quad \text{lub} \qquad \frac{9 * a_1}{3} = 3a_1$$

Jeżeli drugi składnik sumy $a_1 + a_0$ dzieli się przez 3 to cała suma też dzieli się przez 3

Przykład 1.5 *Liczba* $n = 57$ *ma cyfrę dziesiątek 5 i cyfrę jedności 7*

$$57 = 5 * 10 + 7 = 5 * (9 + 1) + 7 = 5 * 9 + 5 + 7,$$

$$(5 * 9 + 5 + 7) : 3 = 5 * 9 : 3 + 12 : 3 = 5 * 3 + 4 = 19$$

- Trzeci test podzielności.
  Liczby podzielne przez 5

$$0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...;$$

zapisujemy w postaci ogólnej

$$n = 5k, \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Te liczby są podzielne przez 5
Obliczmy

$$5 * k : 5 = k, \quad \text{lub} \qquad \frac{5 * k}{5} = k$$

dla każdego naturalnego $k = 0, 1, 2, 3, 4, ...;$

Podzielnośč liczby n przez 5 poznajemy używając testu:

Liczba n jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfra jedności jest 0 lub 5.

Przykład 1.6 *Liczba* $n = 50$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 0.*

$$50 : 5 = 10, \quad \text{bo} \quad 5 * 10 = 50$$

Przykład 1.7 *Liczba* $n = 265$ *jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności jest równa 5.*

$$265 : 5 = 53, \quad \text{bo} \quad 5 * 53 = 265$$

1.2.5 Dzielenie liczb przez liczby jednocyfrowe z resztą

Liczby naturalne, które spełniają testy podzielności przez liczby 2 lub 3 lub 5, dzielą się z resztą 0. Wtedy mówimy, że są podzielne przez 2 lub 3 lub 5. Jednak, jest dużo liczb, które nie spełniają testów podzielności. Wtedy takie liczby dzielimy z resztą.

Przykład 1.8 *Podziel liczbę* 13 *przez* 3

$$\frac{13}{3} = \frac{\overbrace{3*4+1}^{13}}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

Liczba 13 *dzielona przez 3 równa się 4 z resztą* 1.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 4 & \\ -- & \\ 13 & :3 \\ -12 & \\ -- & \\ 1 & \end{array}$$

Odpowiedz: 13 podzielić przez 3 równa się 4 z resztą 1
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$13 = 4 * 3 + 1$$

Przykład 1.9 *Podziel liczbę* 53 *przez* 8

$$\frac{53}{8} = \frac{\overbrace{6*8+5}^{53}}{8} = 6 + \frac{5}{8}$$

Liczba 53 *dzieli się przez* 8 *z resztą* 5.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 6 & \\ -- & \\ 53 & :8 \\ -48 & \\ -- & \\ 5 & \end{array}$$

Odpowiedz: 53 podzielić przez 8 równa się 6 z resztą 5
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$53 = 6 * 8 + 5$$

Przykład 1.10 *Podziel liczbę* 85 *przez* 9

$$\frac{85}{9} = \frac{\overbrace{9*9+4}^{85}}{9} = 6 + \frac{4}{9}$$

Liczba 85 *dzieli się przez* 9 *z resztą* 4.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 9 & \\ -- & \\ 85 & :9 \\ -81 & \\ -- & \\ 4 & \end{array}$$

Odpowiedz: 85 podzielić przez 9 równa się 9 z resztą 4
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$85 = 9 * 9 + 4$$

Ogólnie piszemy, że liczba n dzieli się przez liczbę d z resztą r według wzoru

Przykład 1.11 *Dzielimy liczbę* n *przez* d

$$\frac{n}{d} \quad = \quad \frac{\overbrace{k * d + r}^{n}}{d} = k + \frac{r}{d}$$

Liczba n *dzieli się przez* d *z resztą* r.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} k & \\ -- & \\ n & :d \\ -k * d & \\ -- & \\ r & \end{array}$$

Odpowiedz: n *podzielić przez* d *równa się* k *z resztą* r
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$n = k * d + r$$

1.2.6 Dzielenie liczb przez liczby dwucyfrowe z resztą

Przykład 1.12 *Podziel liczbę* 78 *przez* 42

$$\frac{78}{42} \quad = \quad \frac{\overbrace{42 + 36}^{78}}{42} = 1 + \frac{36}{42}$$

Liczba 78 *dzieli się przez* 42 *z resztą* 36.
Liczby dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rl} 1 & \\ -- & \\ 78 & :42 \\ -42 & \\ -- & \\ 36 & \end{array}$$

Odpowiedz: 78 podzielić przez 42 równa się 1 z resztą 36
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$78 = 1 * 42 + 36$$

Przykład 1.13 *Podziel liczbę* 1190 *przez* 25

$$\frac{1190}{25} \quad = \quad \frac{\overbrace{47 * 25 + 15}^{1190}}{25} = 47 + \frac{15}{25}$$

Liczba 1190 *dzieli się przez* 25 *z resztą* 15.
Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rll}
47 & & \\
-- & & \\
1190 & :25 & 25\ miesci\ sie\ w\ 119\ \ cztery\ razy,\ piszemy\ nad\ kreska\ 4 \\
-100 & & 4 * 25 = 100; odejmujemy\ 100 \\
-- & & \\
190 & & roznica\ 19\ dopisujemy\ nastepna\ cyfre\ 0, \\
-175 & & 25\ miesci\ sie\ w\ 190\ \ siedem\ \ razy\ piszemy\ nad\ kreska\ 7 \\
-- & & 7 * 25 = 175; odejmujemy\ 175 \\
15 & & reszta\ 15
\end{array}$$

Odpowiedz: 1190 podzielić przez 25 równa się 47 z resztą 15
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1190 = 47 * 25 + 15 \qquad \text{lub} \qquad \frac{1190}{25} = 47 + \frac{15}{25} = 47 + \frac{3}{5}$$

Przykład 1.14 *Podziel liczbę* 1995 *przez* 17

$$\frac{1995}{17} \quad = \quad \frac{\overbrace{117 * 17 + 6}^{1995}}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

Liczba 1995 *dzieli się przez* 17 *z resztą* 6.
Teraz dzielimy według schematu

$$\begin{array}{rll}
117 & & \\
-- & & \\
1995 & :17 & 17\ miesci\ sie\ w\ 19\ jeden\ raz,\ piszemy\ 1\ nad\ kreska \\
-17 & & 1 * 17 = 17; odejmujemy\ 17 \\
-- & & \\
29 & & roznica\ 2\ dopisujemy\ nastepna\ cyfre\ 9 \\
-17 & & 17\ miesci\ sie\ 29\ jeden\ raz,\ piszemy\ drugie\ 1\ nad\ kreska \\
-- & & roznica\ 12\ dopisujemy\ nastepna\ cyfre\ 5 \\
125 & & 17\ miesci\ sie\ 125\ siedem\ razy \\
-119 & & 7 * 17 = 119\ piszemy\ 7\ nad\ kreska \\
-- & & \\
6 & & reszta\ 6
\end{array}$$

Odpowiedz: 1995 podzielić przez 17 równa się 117 z resztą 6
Wynik dzielenia zapisujemy w postaci:

$$1995 = 117 * 17 + 6 \qquad \text{lub} \qquad \frac{1995}{17} = 117 + \frac{6}{17}$$

1.2.7 Zadania

Zadanie 1.9 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 2546 : 3, \qquad (ii) \qquad 5796 : 9$$

Zadanie 1.10 *Wykonaj dzielenie pisemne*

$$(i) \qquad 455 : 13, \qquad (ii) \qquad 18011 : 31$$

Zadanie 1.11 *Wykonaj dzielenie pisemne z resztą*

$$(i) \qquad 2547 : 3, \qquad (ii) \qquad 5766 : 9$$

Zadanie 1.12 *Udowodnij, że liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *jest podizelna przez* 3 *wtedy i tylko wtedy, jeżel suma cyfr*

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$$

jest podzielna przez 3*. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba* $\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ *była podzielna przez* 9*.*

Zadanie 1.13 *Udowodnij, że liczba czterocyfrowa* $\alpha_3\alpha_2 25$ *jest podzielna przez* 25 *dla dowolnych cyfr* $\alpha_3,\ \alpha_2$*.*

Zadanie 1.14 .

(a) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3. Wypisz 5 kolejnych liczb podzielnych przez 3.*

(b) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z reszta 1. Wypisz 6 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z reszytą 1*

(c) *Zapisz wzorem ogólnym zbiór liczb podzielnych przez 3 z resztą 2. Wypisz pierwsze 7 kolejnych liczb podzielnych przez 3 z resztą 2.*