

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Silnia, Kombinacje i Wariacje

$$\begin{aligned} n! &= 1 * 2 * 3 * \cdot * (n - 1) * n, & \text{silnia} \\ C_n^k &= \frac{n!}{k!(n - k)!}, & \text{kombinacje} \\ V_n^k &= \frac{n!}{(n - k)!}, & \text{wariacje bez powtorzen.} \\ W_n^k &= n^k, & \text{wariacje z powtorzeniami.} \end{aligned}$$

KOMBINATORYKA
PERMUTACJE WARIACJE KOMBINACJE

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

Warszawa 2018¹

¹Projekt dziewiąty

Contents

1	Kombinatoryka	5
1.0.1	Silnia liczby naturalnej $n!$	5
1.0.2	Ćwiczenia	5
1.0.3	Permutacje	6
1.0.4	Wariacje	7
1.0.5	Wariacje z powtórzeniami.	7
1.0.6	Ćwiczenia	8
1.0.7	Wariacje bez powtórzeń	9
1.0.8	Ćwiczenia	9
1.0.9	Kombinacje	11
1.0.10	Ćwiczenia	11

Chapter 1

Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n , permutacje, wariacje bez powtórzeń i wariacje z powtórzeniami. Niżej podany jest opis tych pojęć z licznymi przykładami i ćwiczeniami.

1.0.1 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silną liczby n i oznaczmy symbolem $n!$. Zatem mamy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n - 1) * n$$

Przyjmujemy że $0! = 1$

Wypiszmy kilka silni liczb naturalnych

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 * 2 = 2$$

$$3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

$$4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$$

$$6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$$

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

.....

.....

$$(n - 1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \cdots * (n - 1)$$

$$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \cdots * (n - 1) * n$$

1.0.2 Ćwiczenia

Obliczanie silni wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.1 Oblicz wartość ułamka

$$\frac{5! * 7!}{4! * 6!}$$

Rozwiązanie:

Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = 4! * 5, \quad 7! = 6! * 7$$

$$\frac{5! * 7!}{4! * 6!} = \frac{4! * 5 * 6! * 7}{4! * 6!} = 5 * 7 = 42$$

Przykład 1.2 Oblicz i uprość ułamek

$$\frac{n!}{(n-1)!}$$

Rozwiązanie:

Łatwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1)$$

$$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1) * n$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1) * n}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1)} = n$$

Zadanie 1.1 Oblicz wartość ułamka

$$\frac{3! * 5! * 7! * 9!}{2! * 4! * 6! * 8!}$$

Zadanie 1.2 Uprość ułamek

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

1.0.3 Permutacje

Permutacją elementów zbioru nazywamy ich ustawienie w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

Na przykład:

Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej 23 składają się z tych samych cyfr 2 i 3 tworzą dwie różne permutacje

$$\begin{array}{cc} 23 & 32 \end{array} \quad \text{ilosc permutacji} \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 i 3 nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

$$\begin{array}{cc} 257 & 275 \\ 527 & 572 \\ 725 & 752 \end{array} \quad \text{ilosc permutacji} \quad 3! = 6$$

Przykład 1.3 Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwu-elementowego ab

$$ab \quad ba \quad \text{ilosc permutacji} \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzy-elementowego abc

$$\begin{array}{l} abc \quad acb \\ bac \quad bca \\ cab \quad cba \end{array} \quad \text{ilosc permutacji} \quad 3! = 6$$

Ogólnie, ilość permutacji n -elementowego zbioru równa jest $n!$

Zadanie 1.3 Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzy-cyfrowej 391

Zadanie 1.4 Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru cztero-elementowego $ABCD$

1.0.4 Wariacje

Wariacją k -elementową ze zbioru n -elementowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n -elementowego. Ciąg k -elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementy zbioru z którego tworzone są wariacje. Natomiast k -elementową wariacją bez powtórzeń jest ciąg w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n -elementowego. W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważne, to znaczy dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią się kolejnością elementów.

1.0.5 Wariacje z powtórzeniami.

Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze ilustruje proces losowania k -elementów ze zbioru n -elementowego, który zawiera tylko elementy różne.

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k -elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k -elementów w którym może być wylosowany ten sam element co najwyżej k -razy.

Podobnie tworzymy k -elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnych elementów. W ten sposób otrzymujemy k -elementową wariacje w której wszystkie elementy są różne, to znaczy nie ma elementów powtórzonych.

Ilość możliwych k -elementowych wariacji z powtórzeniami utworzonych ze zbioru n -elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

1.0.6 Ćwiczenia

Pojęcie wariacji z powtórzeniami i obliczanie ilości k -elementowych wariacji z powtórzeniami wybranymi ze zbioru n -elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.4 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

$$\begin{array}{cc} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 1.5 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 1.6 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami

ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

111	122	113
121	122	123
131	132	133
211	212	213
221	122	123
231	132	233
311	312	313
321	322	323
331	332	333

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^3 = 3^3 = 27$

Zadanie 1.5 Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.6 Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.7 Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{2, 5, 7, 9\}$.

1.0.7 Wariacje bez powtórzeń

Wariacja k-elementowa bez powtórzeń to ciąg elementów różnych wybranych ze zbioru n-elementowego ($1 \leq k \leq n$).

Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \dots * (n-1) * n$$

lub pisząc iloczyn w odwrotnej kolejności jego czynników mamy wzór

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \dots * (n-k) * (n-k+1).$$

1.0.8 Ćwiczenia

Pojęcie wariacji bez powtórzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.7 Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2\}$.

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

12 21

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przypadku równa jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 1.8 Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

12 13
21 23
31 32

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 1.9 Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach

123 132
213 231
312 321

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

Zadanie 1.8 Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.9 Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.10 Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr $\{2, 5, 7, 9\}$.

Zadanie 1.11 Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego $\{a, b, c, d\}$.

1.0.9 Kombinacje

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów jest nie ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

1.0.10 Ćwiczenia

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.10 *Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?*

Rozwiązanie:

Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem. Każdy uczeń może dobrać partnera do gry w szachy na $20 - 1 = 19$ sposobów.

Zatem ilość par różnych równa się $\frac{19 * 20}{2} = 190$.

Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19 * 20}{2} = 190$$

Przykład 1.11 *W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać*

(i) *trzech przedstawicieli*

(ii) *czterech przedstawicieli*

Rozwiązanie (i):

Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można

utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbioru 15-elementowego ?
Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 * 14 * 15}{6} = 13 * 7 * 5 = 455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek

Podobne jest rozwiązanie (ii)

Przykład 1.12 Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy 6 liczb z 49 liczb ?

Rozwiązanie:

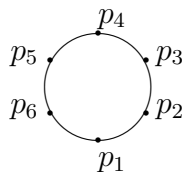
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.

Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{43 * 44 * 45 * 46 * 47 * 48 * 49}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6} = 13983816$$

Odpowiedź: W "Dużym Lotku" ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 1.13 Na okręgu zaznaczono sześć punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okręgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) trójkątów

(b) czworokątów

(c) pięciokątów

(d) sześciokątów

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

Rozwiązanie:

Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem. Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.

Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elementowych kombinacji wybranych

ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 1 * 2 * 3} = \frac{4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3} = 4 * 5 = 20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elemntowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 1 * 2} = \frac{5 * 6}{1 * 2} = 15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elemntowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elemntowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 0!} = 1, \quad \text{gd}y\text{z} \quad 0! = 1.$$