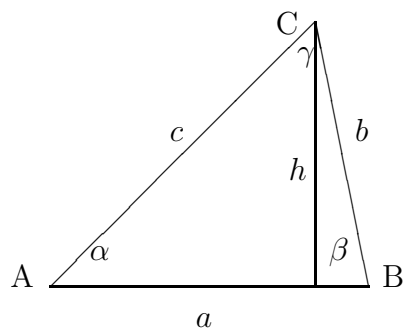


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



Trójkąt ABC o bokach a , b , c i kątach α , β , γ oraz wysokości h .

GEOMETRIA PŁASKA. PLANIMETRIA

Prof. dr. Tadeusz STYŚ

Warszawa 2018

Contents

1	Geometria	5
1.1	Geometria płaska	5
1.1.1	Proste prostopadłe i prosterównoległe	5
1.1.2	Trójkąty	7
1.1.3	Czworokąty	9
1.1.4	Okrąg i koło	13
1.2	Związki miarowe, proporcje i podobieństwo figur płaskich . . .	13
1.2.1	Suma kątów trójkąta	14
1.2.2	Trójkąty przystające	14
1.2.3	Proporcje	15
1.2.4	Twierdzenie Talesa	16
1.2.5	Twierdzenie Pitagorasa	18
1.2.6	Miara łukowa kąta	20
1.2.7	Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg	22
1.2.8	Związki miarowe w trójkącie prostokątnym	22
1.2.9	Trójkącie równoboczny	23

Chapter 1

Geometria

Geometria Euklidesowa, która obejmuje geometrię płaską i geometrie przestrzenną wchodzi do podstawy programu nauczania na poziomie podstawowym i średnim. W szkole podstawowej do programu rozszerzonego matematyki wchodzi tylko niektóre tematy wsparte ćwiczeniami, które są opisane w paragrafie &1, &2, &3.

1.1 Geometria płaska

Zakres geometrii płaskiej obejmuje konstrukcje z linijką i cyrklem figur płaskich oraz związki miarowe w trójkątach, prostokątach, równoległobokach, w okręgach i w wielokątach foremnych.

1.1.1 Proste prostopadłe i prosterównoległe

Opis położenia prostych na płaszczyźnie zaczniemy od instrukcji konstrukcji prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt.

Stawiamy nóżkę cyrkla w danym punkcie i zakreślamy łuki przecinające daną prostą. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w pierwszym punkcie przecięcia i zakreślamy okrąg, podobnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie przecięcia i zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkty przecięcia okręgów linijką. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy prostą prostopadłą do danej prostej i przechodzącą przez dany punkt.

Zadanie 1.1 *Narysuj prostą prostopadłą do prostej na rysunku i przechodzącą przez dany punkt, według powyższego opisu.*

.

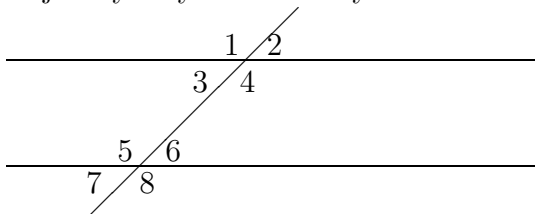
Zadanie 1.2 *Narysuj prostą równoległą do prostej na rysunku i przechodzącą przez dany punkt*

•

Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt oparta jest na rysowaniu równoległoboku.

Opis konstrukcji: stawiamy nóżkę cyrkla w danym punkcie i zakreślamy okrąg, który przecina daną prostą w dwóch punktach. Łączymy pierwszy punkt przecięcia z danym punktem linijką. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla w drugim punkcie i tym samym promieniem zakreślamy drugi okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z danym punktem linijką. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy prostą równoległą.

Na niżej danym rysunku mamy zaznaczone kąty parami równe:



Dwie linie proste równoległe

- kąty wierzchołkowe

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4, \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3, \quad \sphericalangle 5 = \sphericalangle 8, \quad \sphericalangle 6 = \sphericalangle 7$$

- kąty odpowiadające

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5, \quad \sphericalangle 3 = \sphericalangle 7, \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 6, \quad \sphericalangle 4 = \sphericalangle 8$$

- kąty naprzemianległe wewnętrzne

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6, \quad \sphericalangle 4 = \sphericalangle 5,$$

- kąty naprzemianległe zewnętrzne

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 8, \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 7,$$

- kąty przyległe

$$\sphericalangle 1 \text{ i } \sphericalangle 2, \quad \sphericalangle 3 \text{ i } \sphericalangle 4, \quad \sphericalangle 1 \text{ i } \sphericalangle 3, \quad \sphericalangle 2 \text{ i } \sphericalangle 4$$

$$\sphericalangle 5 \text{ i } \sphericalangle 6, \quad \sphericalangle 7 \text{ i } \sphericalangle 8, \quad \sphericalangle 5 \text{ i } \sphericalangle 7, \quad \sphericalangle 6 \text{ i } \sphericalangle 8$$

Zadanie 1.3 Jeden z kątów wierzchołkowych równy jest 30° .

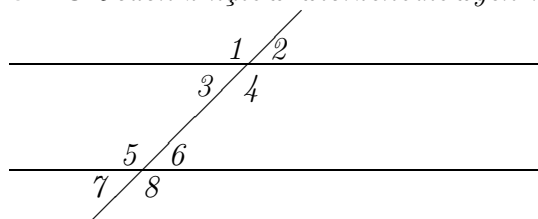


Fig. 4. Dwie linie proste równoległe

Oblicz wszystkie kąty

(a) wierzchołkowe

(b) naprzemian ległe

(c) odpowiadające

(d) przyległe

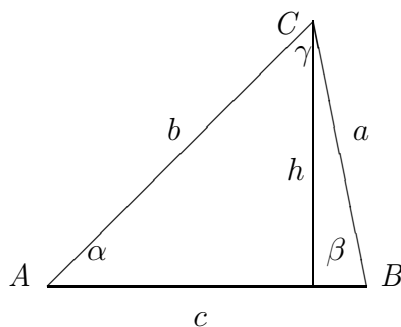
Zaznacz wartości wszystkich kątów na rysunku

1.1.2 Trójkąty

Rozróżniamy następujące trójkąty: trójkąty równoboczne, trójkąty równoramienne, trójkąty prostokątne i trójkąty dowolne.

Konstrukcja trójkąta o tych samych kątach i o bokach proporcjonalnych: Na płaszczyźnie wybieram trzy różne punkty A , B i C i łączymy te punkty używając linijki. W ten sposób narysowaliśmy trójkąt. Boki AB i AC przedłużamy. Na przedłużonych bokach odkładamy odcinki równe długości boków AB i AC , odpowiednio. Łączymy zaznaczone końce odcinków. Widzimy, że w ten sposób narysowaliśmy drugi trójkąt który ma kąty te same co wcześniej narysowny trójkąt, natomiast boki ma dwa razy dłuższe. Rzeczywiście, oba trójkąty mają te same kąty, ponieważ bok BC jest równoległy odpowiedniego boku większego trójkąta, jako kąty odpowiadające.

Przykład 1.1 Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

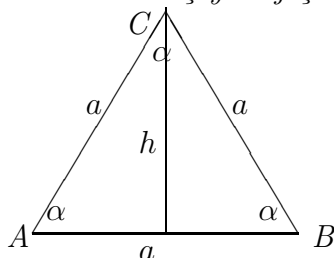


Trójkąt ΔABC

$$\text{Pole trójkąta} = \frac{a * h}{2}, \text{ obwód trójkąta} = a + b + c$$

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.
 Konstrukcja trójkąta równobocznego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości boków trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym długości odcinka. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzmy, że w ten sposób powstał trójkąt o równych bokach i równych kątach.

Przykład 1.2 *Zmierz boki i kąty trójkąta na rysunku*



Trójkąt równoboczny ΔABC

$$\text{Pole trójkąta} = \frac{a * h}{2}, \text{ obwód trójkąta} = a + a + a = 3 * a$$

Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy dłuższych używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

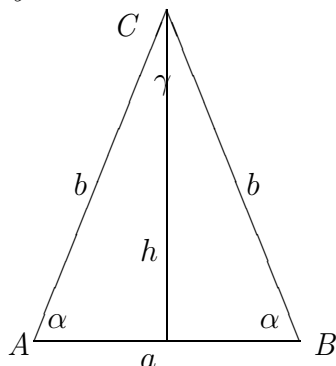
Trójkąt równoramienny ΔABC ma dwa boki równe i dwa kąty przy podstawie też równe.

Konstrukcja trójkąta równoramiennego. Rysujemy odcinek o ustalonej długości jako podstawie trójkąta. Stawiamy nóżkę cyrkla na początku odcinka i zakreślamy okrąg o promieniu równym bokowi trójkąta. Następnie stawiamy nóżkę cyrkla na drugim końcu odcinka i tym samym promieniem zakreślamy okrąg. Łączymy punkt przecięcia okręgów z końcami odcinka. Widzmy, że w ten sposób powstał trójkąt równoramienny.

$$\text{Pole trójkąta} = \frac{a * h}{2}, \text{ obwód trójkąta} = a + 2 * b$$

Przykład 1.3 *Narysuj trójkąt równoramienny o bokach trójkąta na rysunku*

używając linijki i cyrkla.



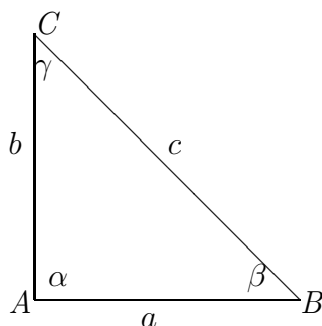
Zmierz boki i kąty tego trójkąta. Oblicz obwód i pole trójkąta, oblicz sumę kątów tego trójkąta

Trójkąt prostokątny

Pole trójkąta = $\frac{a * b}{2}$, obwód trójkąta = $a + b + c$

W trójkącie prostokątnym wyróżniamy przyprostokątne AB i AC , o długości a i b , przeciwprostokątną BC , o długości c , kąt prosty $\alpha = 90^\circ$ i dwa kąty przyległe β, γ

Zadanie 1.4 Zmierz boki i kąty tego trójkąta.



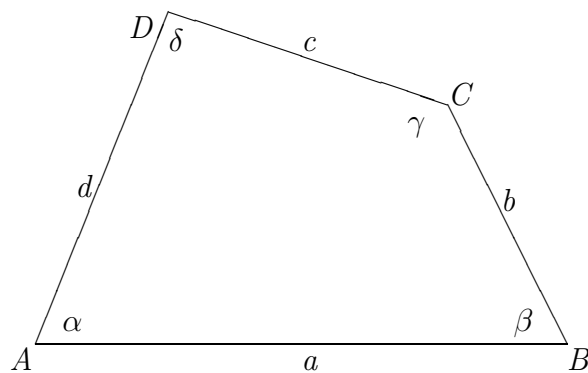
Trójkąt prostokątny ΔABC

Narysuj trójkąt o tych samych kątach i o bokach dwa razy krótszych używając linijki i cyrkla. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

1.1.3 Czworokąty

Czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach A, B, C, D ma cztery boki o długości a, b, c, d , cztery kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Zadanie 1.5 Zmierz boki i kąty tego czworokąta. Oblicz obwód i sumę kątów czworokąta.

Czworokąt $ABCD$

$$a = \quad , b = \quad , c = \quad , d =$$

$$\text{Obwód} =$$

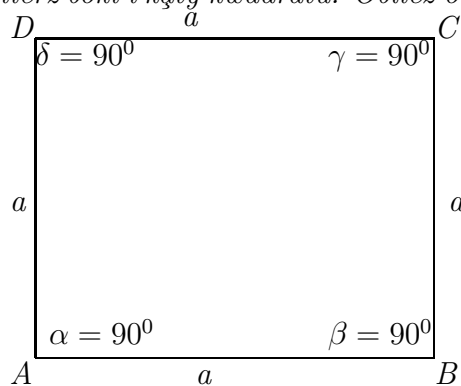
$$\alpha = \quad , \beta = \quad , \gamma = \quad , \delta =$$

$$\text{Suma} = \alpha + \beta + \delta + \gamma =$$

Kwadrat $ABCD$ ma cztery boki równe a , cztery kąty proste równe 90° .

Pole kwadratu = $a * a$, obwód kwadratu = $4 * a$

Zadanie 1.6 Zmierz boki i kąty kwadratu. Oblicz obwód i sumę kątów kwadratu.

Kwadrat $ABCD$

$$a = \quad , b = \quad , c = \quad , d =$$

$$\text{Obwód} =$$

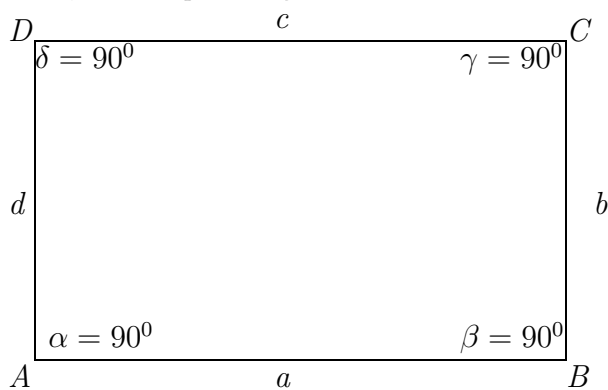
$$\text{Pole} =$$

$$\alpha = \quad , \beta = \quad , \gamma = \quad , \delta =$$

$$\text{Suma} = \alpha + \beta + \delta + \gamma =$$

Zadanie 1.7 Prostokąt $ABCD$ ma cztery boki parami równe $a = c$, $b = d$ cztery kąty proste równe 90° .

Pole prostokąta $= a * b$, *obwód prostokąta* $= 2 * a + 2 * b$



Prostokąt $ABCD$

Zmierz boki i kąty prostokąta. Oblicz obwód, pole i sumę kątów prostokąta.

$$a = \quad , b = \quad , c = \quad , d =$$

$$\text{Obwód} =$$

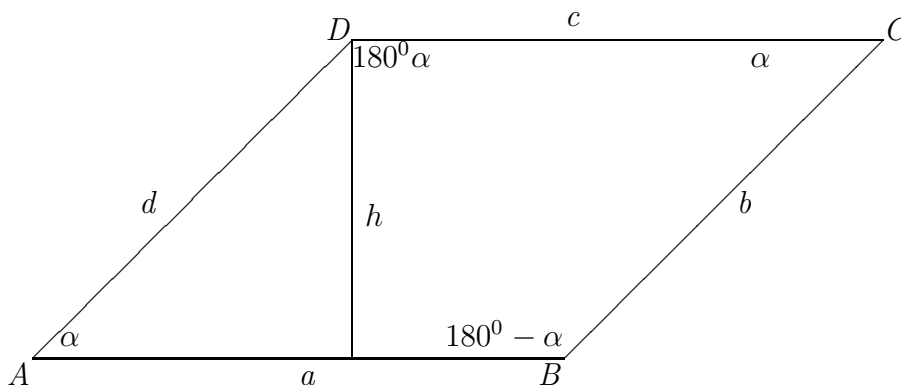
$$\text{Pole} =$$

$$\alpha = \quad , \beta = \quad , \gamma = \quad , \delta =$$

$$\text{Suma} = \alpha + \beta + \delta + \gamma =$$

Zadanie 1.8 Równoległobok $ABCD$ ma cztery boki parami równe $a = c$, $b = d$ cztery kąty parami równe i wysokość h .

Pole równoległoboku = $a * h$, obwód równoległoboku = $2 * a + 2 * b$



Równoległobok ABCD

Zmierz boki i kąty równoległoboku. Oblicz obwód, pole i sumę kątów równoległoboku.

$$a = \quad , b = \quad , c = \quad , d = \quad$$

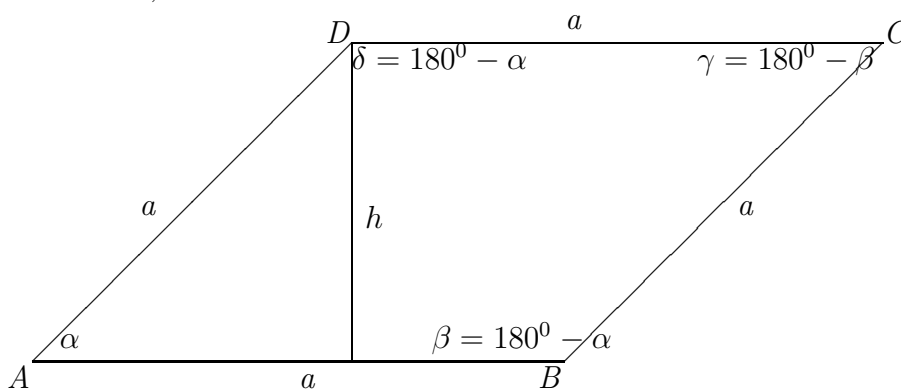
$$\text{Obwód} =$$

$$\text{Pole} =$$

$$\text{Suma} = \alpha + \beta + \delta + \gamma =$$

Zadanie 1.9 Romb ABCD ma cztery boki równe a cztery kąty parami równe i wysokość h .

Pole rombu = $a * h$, obwód rombu = $4 * a$



Romb ABCD

Zmierz boki i kąty równoległoboku. Oblicz obwód, pole i sumę kątów rombu.

$$a = \quad , b = \quad , c = \quad , d =$$

$$\text{Obwód} =$$

$$\text{Pole} =$$

$$\alpha = \quad , \beta = \quad , \gamma = \quad , \delta =$$

$$\text{Suma} = \alpha + \beta + \delta + \gamma =$$

1.1.4 Okrąg i koło

Obszar wewnątrz okręgu nazywamy kołem. Na pierwszym rysunku, zaznacz środek okręgu, promień okręgu, średnicę okręgu i obwód okręgu. Na drugim rysunku zaznacz koło.

Obwód okręgu $= 2 * \pi * r$, , pole koła $= \pi * r^2$, $\pi \approx \frac{314}{100} = 3.14$.



Średnica okręgu równa jest 2 razy promień okręgu.

Zadanie 1.10 *Narysuj cyrklem okrąg o promieniu 3cm. Zaznacz kredką wewnątrz okręgu jako koło o promieniu 3cm.*

Oblicz średnicę okręgu, obwód okręgu, pole koła.

$$\text{średnica okręgu} =$$

$$\text{obwód okręgu} =$$

$$\text{pole koła} =$$

1.2 Związki miarowe, proporcje i podobieństwo figur płaskich

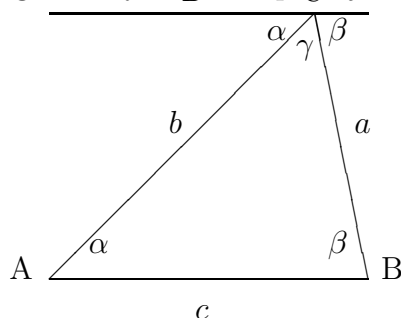
Związki pomiędzy bokami i kątami trójkąta, cechy przystawania trójkątów, trójkąty podobne, proporcje, twierdzenie Talesa. miara kątowa i miara łukowa kątów, kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg stanowią treść następujących paragrafów

Zadanie 1.11 *Narysuj okrąg o promieniu 2cm. W tym okręgu narysuj kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg oparty na tym samym łuku co kąt środkowy.*

Zmierz kątomierzem kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg.

1.2.1 Suma kątów trójkąta

Suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0 , w mierze łukowej π radianów. Nijęj rozpatrzmy geometryczną interpretację sumy kątów trójkąta.



Z rysunku, zauważamy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0 . Rzeczywiście, prosta DC jest równoległa do podstawy AB trójkąta ABC . Kąty naprzemianległe wewnętrzne α przy podstawie i α przy odcinku DC są równe, podobnie β przy podstawie AB i β przy odcinku DC są równe. Widzmy, że

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

To znaczy, że suma kątów każdego trójkąta równa jest 180^0 .

1.2.2 Trójkąty przystające

Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Jasne, że na to żeby dwa trójkąty były przystające wystarczy, żeby miały równe boki, gdyż wtedy automatycznie wszystkie kąty muszą mieć równe. O tym mówi pierwsza cecha przystawania trójkątów.

Pierwsza cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają wszystkie boki równe.

Narysuj trójkąt o tych samych bokach używając linijki i cyrkla. Zmierz kąty tego trójkąta. Oblicz sumę kątów tego trójkąta

Druga cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąty przyległe do tych boków równe. Sprawdzamy, że wtedy pozostałe boki muszą być równe i kąty też równe.

Trzecia cecha przystawania trójkątów. Dwa trójkąty są przystające, jeżeli mają dwa boki równe i kąt pomiędzy tymi bokami równy.

1.2.3 Proporcje

Proporcja prosta. Wartości zmiennej y są proporcjonalne do wartości zmiennej x , jeżeli dla ustalonej wartości k współczynnika proporcji zachodzi równość

$$y = k * x$$

dla każdych wartości zmiennych x, y .

Wtedy mówimy, że wartości y są wprost proporcjonalne do wartości zmiennej x . To znaczy, jeżeli x rośnie to y też rośnie.

Przykład 1.4 *Następujące wartości są proporcjonalne:*

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, \quad y = 2, 4, 6, 8, 10$$

$$y = 2 * x, \quad \text{współczynnik proporcji } k = 2$$

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, \quad y = 10, 20, 30, 40, 50$$

$$y = 10 * x, \quad \text{współczynnik proporcji } k = 10$$

$$x = 2, 4, 6, 8, 10, \quad y = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$y = \frac{1}{2} * x, \quad \text{współczynnik proporcji } k = \frac{1}{2}$$

Zadanie 1.12 *Które pary wartości zmiennych x, y są wprost proporcjonalne? jeżeli są wprost proporcjonalne podaj współczynnik proporcjonalności.*

$$(i) \quad x = 1, 3, 5, 7, 9, \quad y = 3, 9, 15, 21, 27$$

$$(ii) \quad x = 4, 12, 20, 28, 36, \quad y = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$(iii) \quad x = 10, 30, 50, 70, 90, \quad y = 1, 3, 4, 7, 9$$

Proporcja odwrotna. Wartości zmiennej y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej x , jeżeli dla ustalonej wartości k współczynnika proporcji zachodzi równość

$$y = \frac{k}{x}$$

dla każdych wartości zmiennych x, y .

Wtedy mówimy, że wartości y są odwrotnie proporcjonalne do wartości zmiennej x . To znaczy, jeżeli x rośnie to y maleje.

Przykład 1.5 *Następujące wartości są odwrotnie proporcjonalne:*

$$\begin{array}{ll}
 x = 1, 2, 3, 4, 5, & y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \\
 y = \frac{1}{x}, & \text{współczynnik proporcji } k = 1 \\
 x = 2, 4, 6, 8, 10, & y = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 y = \frac{2}{x}, & \text{współczynnik proporcji } k = 2 \\
 x = 20, 40, 60, 80, 100, & y = 2, 4, 6, 8, 10 \\
 y = \frac{10}{x}, & \text{współczynnik proporcji } k = 10
 \end{array}$$

Zadanie 1.13 *Które pary wartości zmiennych x, y są odwrotnie proporcjonalne? jeżeli są odwrotnie proporcjonalne podaj współczynnik proporcjonalności.*

$$\begin{array}{ll}
 (i) & x = 1, 3, 5, 7, 9, \quad y = 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9} \\
 (ii) & x = 4, 12, 20, 28, 36, \quad y = \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{35}{14}, \frac{45}{18} \\
 (iii) & x = 10, 30, 50, 70, 90, \quad y = 1, 3, 4, 7, 9
 \end{array}$$

Cztery wartości a, b, c, d są proporcjonalne, jeżeli spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{dla } b \neq 0, d \neq 0.$$

Wtedy prawdziwa jest też równość

$$a * d = c * b, \quad \text{mnożenie na krzyż}$$

Przykład 1.6 *Wartości $a = 1, b = 2, c = 10, d = 20$ są proporcjonalne, ponieważ*

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{30},$$

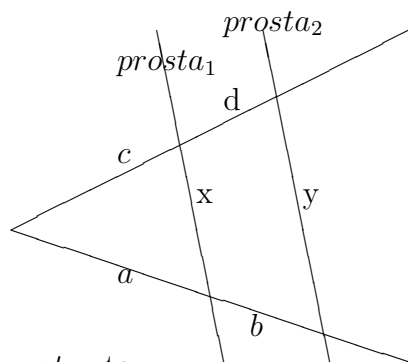
mamy również

$$2 * 30 = 3 * 20 = 60$$

1.2.4 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramie-

niu kąta



Jeżeli $prosta_1 \parallel prosta_2$ to :

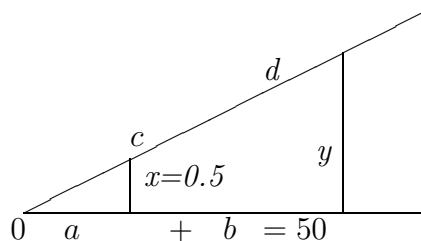
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$

Przykład 1.7 Oblicz wysokość drzewa z odległości 50m. Stosując twierdzenie Talesa obliczamy wysokość drzewa y z proporcji

$$\frac{a}{a+b} = \frac{x}{y}, \quad y = \frac{(a+b) * x}{a}$$

Dane: $a + b = 50m$, Dokonujemy pomiarów $a = 2m$, $x = 0.5m$ do proporcji, zobacz na rysunku.



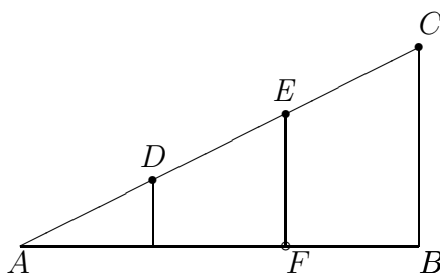
Podstawiając dane obliczamy wysokość drzewa $y = \frac{(a+b) * x}{a} = \frac{50 * 0.5}{2} = 12.5$

Twierdzenie Talesa stosujemy w zadaniach dzielenia odcinka w danej proporcji.

Przykład 1.8 Podzielić odcinek AB w stosunku $2 : 3$

Rozwiązanie. Na ramieniu AC zaznaczamy dowolną rozwartością cyrkla trzy punkty D , E i punkt C . Następnie, łączymy punkt C z punktem B używając linijki. Rysujemy równoległe do odcinka BC przechodzące przez punkty D i E . W ten sposób dostajemy podział odcinka AB punktem F w stosunku $2 : 3$. Zatem, z twierdzenia Talesa mamy proporcje

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$



Zadanie 1.14 Oblicz wysokość drzewa z odległości 150m , wiedząc, że wysokość listwy geodezyjnej równa jest 2m i jej odległość od punktu pomiaru 10m .

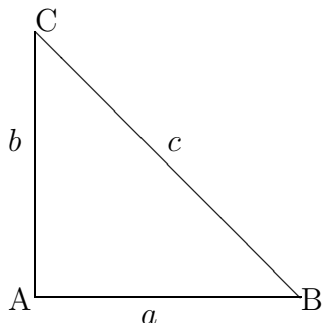
Zadanie 1.15 Podzielić odcinek AB w stosunku $1 : 3$



1.2.5 Twierdzenie Pitagorasa

Figury płaskie, twierdzenie Pitagorasa, wielokąty foremne, okrąg: kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg, miara łukowa kątów, konstrukcje figur płaskich, figury przestrzenne granastosłupy proste, walce, stożki, ostrosłupy, sfery i kule, obliczanie objętości i pola powierzchni.

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym wynikają z twierdzenia Pitagorasa.



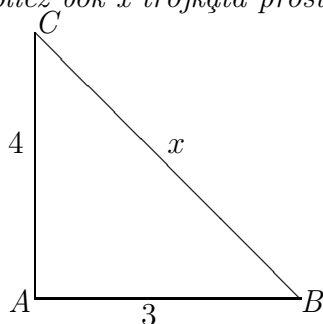
Trójkąt prostokątny $\triangle ABC$

Twierdzenie 1.1 *W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

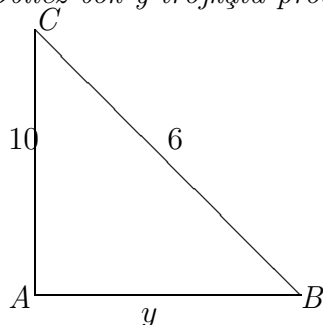
Tutaj przez a i b oznaczone są przyprostokątne, literą c oznaczona jest przeciwprostokątna, (zobacz rysunek)

Przykład 1.9 *Oblicz bok x trójkąta prostokątnego*



Trójkąt prostokątny $\triangle ABC$

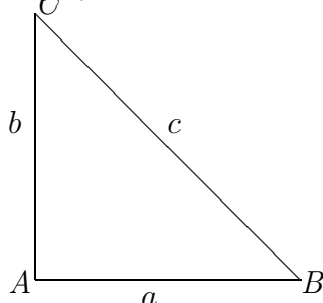
Przykład 1.10 *Oblicz bok y trójkąta prostokątnego*



Trójkąt prostokątny $\triangle ABC$

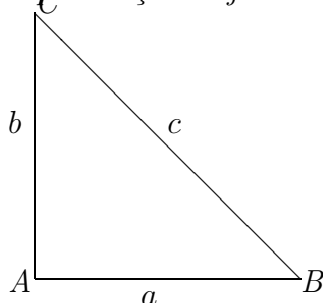
Przykład 1.11 *Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, wiedząc, że*

przyprostokątne $a = 9$, $b = 12$



Trójkąt prostokątny $\triangle ABC$

Przykład 1.12 Oblicz wszystkie boki trójkąta prostokątnego, wiedząc, że przyprostokątna $a = 12\text{cm}$, przyprostokątna b jest o 4cm dłuższa od przyprostokątnej a , natomiast przeciwprostokątna c jest dłuższa o 8cm od przyprostokątnej a .



Trójkąt prostokątny $\triangle ABC$

1.2.6 Miara łukowa kąta

Miarę łukową kąta α określamy jako stosunek długości łuku l opartego na kącie α do promienia R

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

Kąt pełny, który w mierze kątovej ma 360° oparty jest na łuku $l = 2\pi * R$ równym obwodowi okręgu. Zatem miara łukowa kąta pełnego równa jest

$$\alpha = \frac{2\pi * R}{R} = 2\pi$$

Podobnie kąt półpełny, który w mierze kątovej ma 180° oparty jest na łuku $l = \pi * R$ równym połowie obwodu okręgu. To znaczy, że miara łukowa kąta półpełnego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{R} = \pi$$

Również kąt prosty, który w mierze kątovej ma 90° oparty jest na łuku $l = \frac{2\pi * R}{4} = \frac{\pi * R}{2}$ równym czwartej części obwodu okręgu. To znaczy, że

miara łukowa kąta prostego równa jest

$$\alpha = \frac{\pi * R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

W istocie, miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia R . Dlatego możemy przyjąć $R = 1$

Jednostką miary łukowej kąta jest 1 radian. Kąt pełny ma $2 * \pi$ radianów, któremu w mierze kątowej odpowiada 360^0 . Zatem, jeden stopień

$$1^0 = \frac{2 * \pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{radianow}$$

natomiast

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi}$$

Przykład 1.13 *Oblicz miarę łukową kąta 30^0 .*

Rozwiązanie. *Korzystamy z proporcji, kątowi 180^0 odpowiada miara łukowa tego kąta π radianów. Zatem kątowi 30^0 odpowiada miara łukowa x radianów. Tę proporcję zapisujemy równaniem*

$$\frac{\pi}{180} = \frac{x}{30}$$

Skąd obliczamy miarę łukową kąta 30^0

$$x = \frac{30 * \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 1.16 *Oblicz miarę łukową kątów*

$$(i) \ 45^0, \quad (ii) \ 60^0$$

1.2.7 Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg

Kątem środkowym nazywamy kąt pomiędzy promieniami okręgu o wierzchołku w środku okręgu. Kątem wpisanym nazywamy kąt, którego trzy wierzchołki leżą na okręgu.

Związek pomiędzy kątem środkowym i kątem wpisanym w okrąg

Twierdzenie 1.2 *Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany w okrąg jest dwa razy większy od kąta wpisanego*

Dowód.

Zauważamy, że trójkąty równoramienne $\triangle ABO$, $\triangle ACO$ o ramionach równych promieniowi okręgu R mają kąty przy podstawach AB i AC równe β i γ , zaznaczone na rysunku.

Następnie zauważamy, że

$$\alpha = \beta + \gamma$$

$$2\beta + \delta_2 = \pi$$

$$2\gamma + \delta_3 = \pi$$

$$2\beta + 2\gamma + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi, \quad \delta_2 + \delta_3 = 2\pi - 2\beta - 2\gamma$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 2\pi,$$

$$\delta_1 = 2\pi - (\delta_2 + \delta_3) = 2\pi - 2\pi + 2(\beta + \gamma) = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$$

Skąd, otrzymamy, że kąt środkowy $\delta_1 = 2\alpha$ jest dwa razy większy od kąta wpisanego α .

Wniosek: Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty, ma 0, w mierze łukowej ma π radianów.

1.2.8 Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny oparty na średnicy AB okręgu

Z twierdzenia Pitagorasa wynika związek pomiędzy bokami trójkąta prostokątnego

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Związek ten implikuje inne miary w trójkątach prostokątnych, równoramiennych i równobocznych.

Zauważmy, że trójkąty

$$\triangle ABC, \quad \triangle ADC, \quad \triangle DBC$$

są podobne. Zatem na przeciw równych kątów mają proporcjonalne boki.

Zproporcji

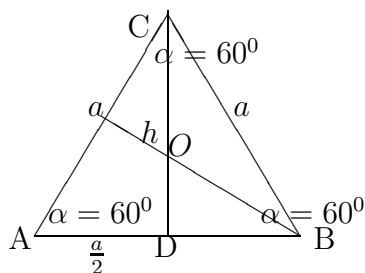
$$\frac{h}{|AD|} = \frac{|DB|}{h} \quad \text{lub} \quad h^2 = |AD| * |DB|$$

wynika, że wysokość h równa jest średniej geometrycznej rzutów przyprostokątnych na przeciwprostokątną. To znaczy

$$h = \sqrt{|AD| * |DB|}$$

1.2.9 Trójkącie równoboczny

Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe $\alpha = 60^0$, w mierze łukowej $\alpha = \frac{\pi}{3}$ jak na rysunku



Trójkąt równoboczny $\triangle ABC$

Wysokość h trójkąta $\triangle ABC$ jest dwusieczną kąta α i dzieli podstawę a na połowę w punkcie D . Podobnie wysokości trójkąta równobocznego spuszczone na pozostałe boki dzielą podstawę na połowy i przecinają się w jednym punkcie O . Punkt przecięcia wysokości O dzieli te wysokości w stosunku 1 : 3. To znaczy zachodzi następująca proporcja

$$\frac{|DO|}{|DC|} = \frac{1}{3}, \quad |DC| = h$$

Stąd mamy

$$|DO| = \frac{1}{3}h, \quad \text{i} \quad |OC| = \frac{2}{3}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h trójkąta $\triangle ABC$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

Wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole trójkąta równobocznego

$$P = h * \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$