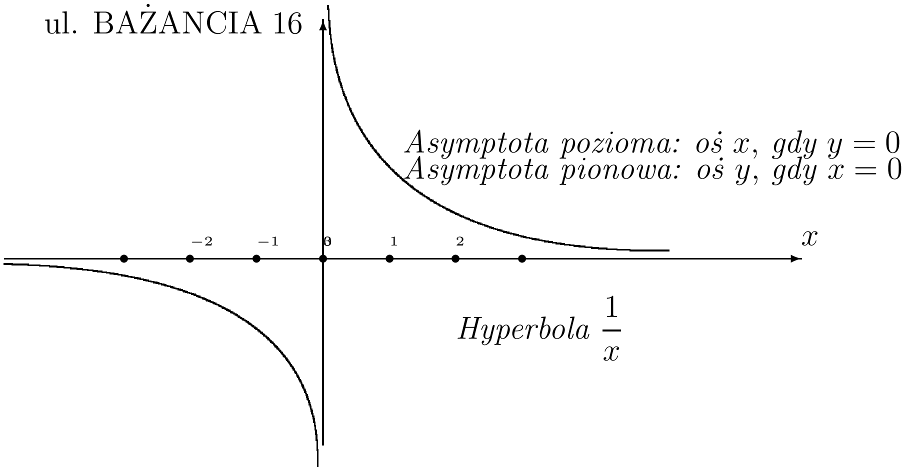
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16



FUNKCJE ELEMENTARNE
WYMIERNE POTĘGOWE LOGARYTMICZNE

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018

Contents

Chapter 1

Funkcje elementarne

Do funkcji elementarnych zaliczamy wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze, funkcje logarytmiczne, funkcje trygonometryczne i funkcja pierwiastek kwadratowy. W rozszerzonym programie szkoły podstawowej wiedza o funkcjach elementarnych ma charakter wstępny. W rozdziale *Wielomiany* opisane zostały fukcje liniowe, trójmian kwadratowy i wielomiany stopnia n. W tym rozdziele przedstawimy niektóre z funkcji elementarnych w zakresie podstawowym wsparte licznymi przykładamy i ćwiczeniamy.

1.1 Funkcje wymierne

Zbiór liczb wymiernych jest rozszerzeniem zbioru liczb całkowitych. Podobnie zbiór funkcji wymiernych jest rozszerzeniem zbioru wielomianów.
Mianowicie, funkcje wymierne określamy jako iloraz wielomianów

$$w(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

stopni n i m, odpowiednio.
Dziedziną funkcji wymiernych jest zbiór tych liczb rzeczywistych $x \in R$ dla których mianownik $q_m(x) \neq 0$ jest różny od zera. Zatem dziedziną funkcji wymiernej $w(x)$ jest zbiór liczb rzczywistych

$$D = \{x \in R : \quad q_m(x) \neq 0\}$$

1.1.1 Przyłady funkcji wymiernych

Hyperbola

$$w(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

jest najprostrzą a zarazem podstawową funkcją wymierną, która chrakteryzuje ważne własności wszystkich funkcji wymiernych.

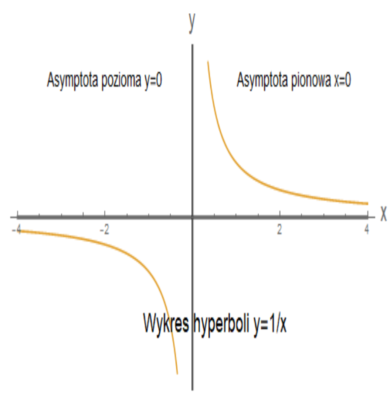
Rozpatrzmy następujące własności hyperboli:

1. dziedzinę
2. zbiór wartości
3. postać ułamka prostego
4. asymptoty

Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera. Piszemy

$$D = \{x \in R: \quad x \neq 0.\}$$

Również zbiorem jej wartości też jest zbiór liczb rzczywistych różnych od zera, gdyż $\frac{1}{x} \neq 0$ dla $x \neq 0$. Wykresem tej funkcji wynmiernej jest hyperbola



Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą oś x i pionową oś y

Przykład 1.1 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x \neq -1.$$

podaj

1. *dziedzinę*
2. *zbiór wartości*
3. *postać ułamka prostego*
4. *asymptoty*

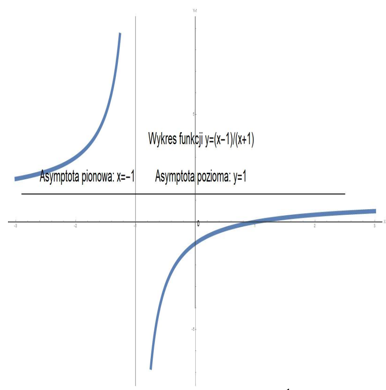
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od -1. Piszemy

$$D = \{x \in R: \quad x \neq 0.\}$$

Tą funkcję wymierną zapiszmy wpostaci ułamków prosych ułamki proste

$$w(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1+2-2}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzczywistych różnych od 1, gdyż $w(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1} \neq 1$ dla $x \neq -1$.
Wykresem tej funkcji wynmiernej jest hyperbola



Wykres funkcji $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

Zauważmy, że ta hyperbola ma dwie asymptoty poziomą $x = 1$ i pionową przzechodzącą przez punkt $x = -1$ to jest punkt w którym funkcja jest nieokreślona.

Przykład 1.2 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

podaj

1. *dziedzinę*
2. *zbiór wartości*
3. *asymptoty*

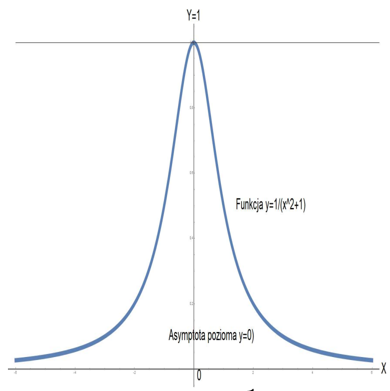
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych. Piszemy

$$D = \{x \in R : \ \infty < x < \infty.\}$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział otwarty $(0, 1)$ liczb rzczywistych dodatnich oznaczany symbolem R_+. Istotnie, zauważamy, że wartości tej funkcji spełniajaą nierówność

$$0 < \frac{1}{x^2+1} < 1, \qquad x \in R.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest krzywa



Funkcja wymierna $\dfrac{1}{x^2+1}$

Ta funkcja wymierna ma jedną asymptotę poziomą $y = 0$ to jest oś x.

Przykład 1.3 *Rozpatrzmy funkcje wymierną*

$$w(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

podaj

1. *dziedzinę*
2. *zbiór wartości*
3. *asymptoty*

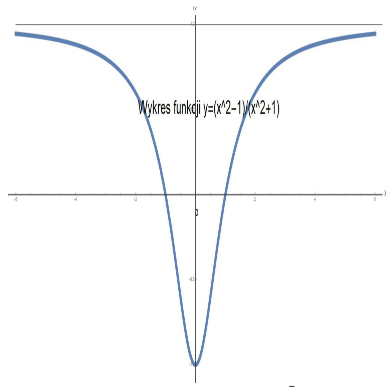
Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, gdyż mianownik $x^2 + 1 > 1$ jest dodatni dla każdego rzeczywistego $x \in R$. Piszemy

$$D = \{x \in R : \ \infty < x < \infty.\}$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział $[-1, 1)$ liczb rzczywistych. Mianowicie, łatwo sprawdzamy nierówność:

$$-1 \leq \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1.$$

Wykresem tej funkcji wymiernej jest następująca krzywa:



Funkcja wymierna $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Ta funkcja wymierna ma jedną asymptotę poziomą $y = 1$ dla $-\infty < x < \infty$.

Zadanie 1.1 *dla następującej funkcji wymiernej:*

$$(i) \quad w(x) = \frac{2x - 1}{x - 2},$$

$$(ii) \quad w(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4},$$

podaj

1. *dziwdzinę*
2. *zbiór wartości*
3. *postać ułamka prostego*
4. *asymptoty*

1.1.2 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Ułamkiem prostym nazywamy następujące funkcje wymierne:

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Przykład 1.4 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

podaj

1. *dziwdzinę*
2. *zbiór wartości*

3. postać ułamka prostego

4. asymptoty

Rozwiązanie. Dziedziną tej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych dla których mianownik jest różny od zera. To znaczy

$D = \{x \in R: \ \ x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \neq 0\} = \{x \in R: \ \ (x \neq 1) \cup (x \neq -1)\}$

Rozkładu tej funkcji wymiernej szukamy metodą współczynników nieoznaczonych. Mianowicie, znajdziemy A i B takie, że następująca równość zachodzi

$$w(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji $w(x)$, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ lub $x \neq 1$
Zatem, współczynniki A i B wyznaczamy z tożsamości

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

która jest spełniona dla każdego $x \in D$ z dziedziny funkcji, to znaczy dla każdego $x \neq -1$ lub $x \neq 1$.
Napiszemy tą tożsamość we wspólnym mianowniku

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

Porównując współóczynniki w licznikach przy x oraz wyrazy wolne, otrzymamy równania na niewiadome A i B

$$A + B = 2, \quad A - B = -1.$$

Obliczamy $A = B - 1$ oraz $(B-1) + B = 2, \ \ 2B = 3$.
Skąd znajdujemy $B = \frac{3}{2}, \ \ A = B - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
Odpowiedź: Rozkład tej funkcji wymiernej na ułamki proste jest następujący:

$$w(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

Zadanie 1.2 *Rozłóż funkcje wymierną na ułamki proste*

$$w(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)(x^2+4)}$$

podaj

1. dziwdzinę

2. zbiór wartości

3. postać ułamka prostego

4. asymptoty

1.2 Funkcja pierwiastek kwadratowy $f(x) = \sqrt{x}$

Funkcje pierwiastek kwadratowy piszemy w symbolach

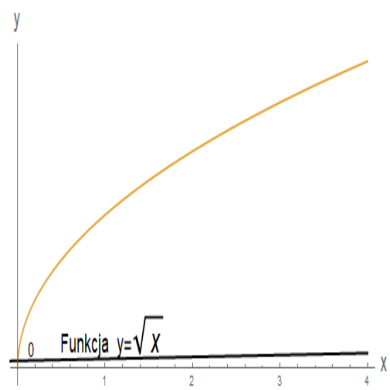
$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad \text{lub} \qquad f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{dla } \ x \geq 0.$$

Ogólnie, pierwiastek $n-$tego stopnia piszemy

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad \text{lub} \qquad f(x) = x^{\frac{1}{n}}.$$

Dziedziną funkcji pierwiastek kwadratowy jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, to jest przedział lewostronnie domknięty $[0, \infty)$. Również zbiorem wartości tej funkcji jest przedził $[0, \infty)$, czyli wszystkie liczby rzeczywiste nieujemne, włączając zero.

Wykres funkcji pierwiastek kwadratowy



Funkcja pierwiastek kwadratowy

Równania i nierówności z wyrażeniami zawierającymi pierwiastek kwadratowy rozwiązujemy ze szczególną ostrożnością mając na uwadze możliwość błędów, które mogą pojawić się w stosowaniu relacji nie równoważnych.

1.2.1 Równaia z wyrażeniem $\sqrt{x}$

Rozwiązywanie równań z wyrażeniem $\sqrt{x}$ wyjaśniamy w następujących przykładach:

Przykład 1.5 *Rozwiąż rownanie:*

$$x = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania , to jest w przedzle $[0, \infty)$ Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$x^2 = x, \qquad -\infty < x < \infty,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych włączając liczby ujemne. Zatem te dwa równania mają różne dziedziny i dlatego nie są równoważne.

Łatwo znajdujemy rozwiązanie

$$x - x^2 = 0, \quad x(x-1) = 0, \quad x = 0, \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Sprawdzmy, że oba zera funkcji $x = 0$ lub $x = 1$ należą do dziedziny $[0, \infty)$. Zatem to równanie ma dwa zera $x = 0,\ x = 1$.

Przykład 1.6 *Rozwiąż równanie:*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1, \qquad x \geq 1.$$

Rozwiązanie. Naturalnie rozwiązania szukamy w dziedzinie tego równania, to jest w przedzle $(1, \infty)$ Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, otrzymamy równanie nie równoważne

$$(x+1) - 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + (x-1) = 1, \quad \text{lub} \quad 2x - 2\sqrt{x^2-1} = 1 \qquad 1 < x < \infty,$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych $x < -1$ lub $x > 1$ włączając liczby ujemne mniejsze od -1. Zatem te dwa równania mają różne dziedziny i dlatego nie są równoważne.
To równanie piszmy w postaci

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} - x, \qquad x \geq 1.$$

Jeszcze raz podnosząc stronami, otrzymamy równanie też nie równoażne

$$x^2 - 1 = (\frac{1}{2} - x)^2, \quad \text{lub} \quad x^2 - 1 = \frac{1}{4} - x + x^2, \quad \text{lub,} \quad x - \frac{5}{4} = 0.$$

które ma sens liczbowy dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Rozwiązaniem ostatniego równania jest liczba $x = \dfrac{5}{4} > 1$, która należy do dziedzny równania.
Sprawdzamy, że

$$\sqrt{\frac{5}{4} + 1} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = 1, \qquad \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

1.3 Funkcja wykładnicza

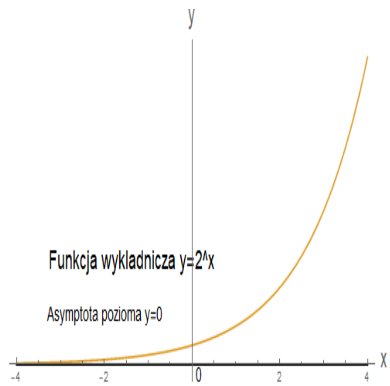
Funkcję wykładniczą określamy następującym wzorem:

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Liczbę rzeczywistą $a > 0,\ a \neq 1$ dodatnią i różną od jeden nazywamy podstawą funkcji wykładniczej. Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzczywistych

$$D = \{x \in R : \ -\infty < x < \infty\}.$$

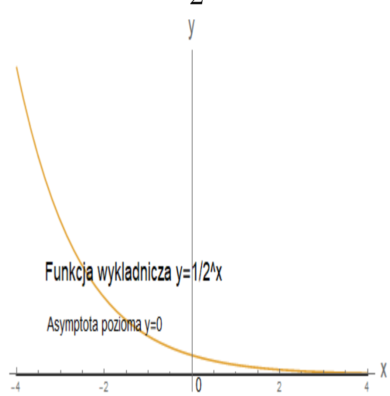
Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest zbiór R_+ liczb dodatnich.
Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x, \ \ -\infty < x < \infty$



Funkcja wykładnicza

Zauważmy z wykresu, że funkcja wykładnicza ma jedną asymptotę, którą jest oś x. To jest zbiór punktów $(x, 0)$ gdy współrzędna $y = 0$.
Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca jeżeli jej podstawa $a > 1$. Natomiast funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca, jeżeli jej podstawa $0 < a < 1$. Na rysunku funkcja $f(x) = 2^x$ jest rosnąca ponieważ jej wykres wzrasta gdy argument x też wzrasta.

Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, gdy jej podstawa 0< $a = \frac{1}{2} < 1$.



Funkcja wykładnicza $y = 1/2^x$

Widzimy z powyższego wykresu, że, funkcja wykładnicza $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ jest malejąca, gdyż jej wykres maleje podczas gdy argument rośnie.

1.3.1 Własności funkcji wykładniczej

1. Wartość funkcji wykładniczej w zerze $x = 0$ równa jest jeden.

$$f(0) = 1, \qquad poniewaz \quad f(0) = a^0 = 1,$$

   dla każdej podstawy $a > 0$.

2. Wartość funkcji wykładniczej dla $x = 1$ równa jest podstawie a.

$$f(1) = a, \qquad poniewaz \quad f(a) = a^1 = a,$$

3. funkcja wykładnicza od sumy argumentów równa jest iloczynowi wartości

$$f(x+t) = f(x) * f(t)$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$f(x+t) = a^{x+t} = a^x * a^t = f(x) * f(t)$$

4. funkcja wykładnicza od różnicy argumentów równa jest ilorazowi wartości

$$f(x-t) = \frac{f(x)}{f(t)}$$

Rzeczywiście sprawdzamy, że

$$f(x-t) = a^{x-t} = a^x * a^{-t} = \frac{a^x}{a^t} = \frac{f(x)}{f(t)}$$

5. funkcja wykładnicza od iloczynu argumentów równa jest potędze

$$f(x*t) = (f(x))^t$$

Sprawdzamy, że

$$f(x*t) = a^{x*t} = (a^x)^t = (f(x))^t$$

6. funkcja wykładnicza od argumentu $\frac{m}{n}$ równa jest pierwiastkowi n-tego stopnia z wartości m-tej potęgi

$$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{f(m)}$$

Mianowicie

$$f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{f(m)}$$

Przykład 1.7 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^8 * 3^{-5}$$

Rozwiązanie:
W tym przykładzie stosujemy własnoś˙ 2 do funkcji wykładniczej

$$f(x) = a^x$$

gdy podstawa $a = 3$ i argumenty $x = 8$ i $x = -5$. Zatem stosując własność 2, obliczamy

$$f(3) * f(-5) = 3^8 * 3^{-5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27$$

Przykład 1.8 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązanie:
Korzystając z własności funkcji wykładniczej, obliczamy

$$3^{\frac{5}{2}} * 12^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} * (3 * 4)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} * 3^{\frac{1}{2}} * 4^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}} * \sqrt{4} = 3^2 * 2 = 18$$

Zadanie 1.3 *Oblicz wartość wyrażenia*

$$(i) \quad (3\frac{1}{3})^{-2}, \qquad (ii) \quad 2^{\frac{8}{3}} * 2^{-\frac{5}{3}} * 16^{\frac{1}{2}}$$

Zadanie 1.4 *Rozpatrz funkcję wykładniczą*

$$f(x) = 2^x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej

$$y = f(x-1) + 1, \qquad -\infty < x < \infty.$$

w układzie współrzędnych x, y
Oblicz wartość funkcji $f(x-1)+1$ dla $x = 3$.

1.3.2 Równania wykładnicze

Równania wykładnicze i nierówności wkładnicze rozwiązujemy korzystają z następujących własności:

- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x > 0$ jest dodatnia na całej osi liczbowej dla $-\infty < x < \infty$.
- zbiórem wartości funkcji wykładniczej są wszystkie liczby dodatnie, $R_+ = (0, \infty)$.
- funkcja wykładnicza $f(0) = 0$ dla każdej podstawy $a > 0,\ a \neq 1$
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $a > 1$.
- funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest malejąca na całej osi liczbowej $-\infty < x < \infty$, jeżel podstawa $0 < a < 1$.

Niżej podajemy przykłady rozwiązań równań wykładniczych

Przykład 1.9 *Rozwiąż równanie*

$$2^{2x} - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest cały zbiór liczb rzczywistych R. Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$(2^x)^2 - 3 * 2^x + 2 = 0$$

Stosując podstawienie $t = 2^x$, otrzymamy równanie kwadratowe

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 * 2 = 1.$$

Oblicczamy pierwiastki tego równania

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1, \qquad \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, obliczamy rozawiązanie:

Jeżeli $2^x = 1$, to $x = 0$.
Jeżeli $2^x = 2$, to $x = 1$.

Przykład 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 9$$

Rozwiązanie. Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzczywistych różnych od $\frac{1}{3}$. to znaczy $D = r - \{\frac{1}{3}\}$.
Teraz, to równanie napiszemy w postaci

$$3^{\frac{2x-1}{3x-1}} = 3^2$$

Skąd mamy równie

$$\frac{2x-1}{3x-1} = 2,$$

Obliczamy rozwiązanie

$$2x - 1 = 2(3x - 1), \quad 2x - 1 = 6x - 2, \quad 4x = 1, \quad x = \frac{1}{4}$$

Zadanie 1.5 *Rozwiąż równanie*

$$3^x + 27 * 3^{-x} - 12 = 0.$$

Zadanie 1.6 *Rozwiąż równanie*

$$5^{\frac{3x-1}{2x-3}} = 25.$$

1.4 Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależnośc zmiennej y od zmiennej x wzorem

$$y = a^x, \qquad a > 0, \; a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej x od zmiennej y wzorem

$$x = log_a\, y, \qquad y > 0.$$

Wtedy stałą $a > 0, \;\; a \neq 1$ nazywamy podstawą logarytmu.
Na przykład logarytm dziesiętny, gdy $a = 10$ piszemy

$$x = log_{10}\, y, \qquad dla \;\; y > 0$$

Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym i ma charakter podstawowy-standardowy. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych x i y. Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą x, natomiast zmienną zależną oznaczamy literą y, która zależy od x.
Dlatego logarytm dziesiętny jest oznaczany symbolem

$$y = log\, x, \qquad x > 0,$$

bez pisania podstawy logarytmy 10.

1.5 Logarytm naturalny

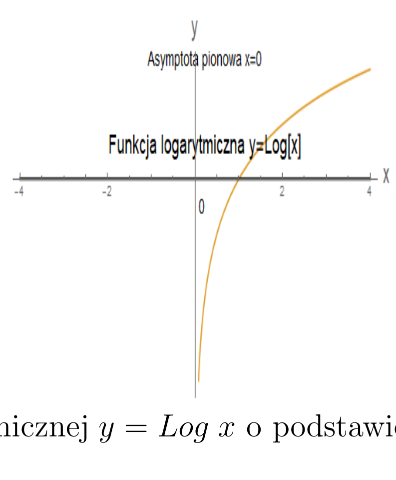
Logarytme naturalny jest odwrotą funkcją do funkcj potęgowej

$$y = e^x, \qquad lub \qquad y = Exp[x], \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.



Wykres funkcji logarytmicznej $y = Log\ x$ o podstawie $a = 10$.

1.5.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = 1$ równa jest zero.

$$g(1) = log_a\, 1 = 0, \quad poniewaz \;\; a^0 = 1, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej dla $x = a$ równa jest jeden.
$$g(a) = log_a = 1, \quad poniewaz \;\; a^1 = a, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości
$$log_a\, x * t = log_a x + log_a\, t, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
W symbolach ogólnych tą własność piszemy
$$g(x) = \log_a\; x, \;\; g(x * t) = g(x) + g(t), \;\; x > 0, \;\; t > 0.$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y_1 = log_a\, x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1,$$
$$y_2 = log_a\, t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
Skąd znajdujemy
$$\begin{aligned} x * t &= a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1+y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a\, x * t &= \log_a\; a^{y_1+y_2} = y_1 + y_2 = log_a\, x + log_a\;\; t \end{aligned}$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości
$$log_a\, \frac{x}{t} = log_a\, x - log_a\, t, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
W symbolach ogólnych tą własność piszemy
$$g(x) = \log_a\; x, \;\; g(\frac{x}{t}) = g(x) - g(t), \;\; x > 0, \;\; t > 0.$$
Istotnie sprawdzamy, że
$$y_1 = log_a\, x, \qquad to \qquad x = a^{y_1}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1,$$
$$y_2 = log_a\, t, \qquad to \qquad t = a^{y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$
Skąd znajdujemy
$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1-y_2}, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1. \\ log_a\, \frac{x}{t} &= \log_a\; a^{y_1-y_2} = y_1 - y_2 = log_a\, x - log_a\;\; t \end{aligned}$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu x^k, $k = 0, 1, 2, , 3, ..., ;$ równa jest iloczynowi wykładnika potęgi k razy logarytm podstawy potęgi x
$$log_a\, x^k = k * log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...;$$
Własność ta bezporednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie
$$log_a\, x^k = \underbrace{\log_a\; x * x * \cdots * x}_{k} = \underbrace{\log_a\; x + \log_a\; x + \cdots + log_a\, x}_{k} = k * \log_a\; x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu $x^{\frac{m}{n}}$ równa jest logarytmowi

$$\log\ x^{\frac{m}{n}} = m * \log\ \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmiczej i wykładniczej

$$\log_a\ x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a\ \sqrt[n]{x} + \log_a\ \sqrt[n]{x} + \cdots + log_a\ \sqrt[n]{x}}_{m} = m * \log_a\ \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach $a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$, możemy zmienić podastawę a logarytmu $log_a\ b$ na podstawę c według wzoru

$$log_a\ b = \frac{log\ _c\ b}{log_c\ a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a\ b, \quad q = \log_c\ b, \quad r = \log_c\ a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{array}{ll} b = (c^r)^p, & b = c^{p*r}, \\ \log_c\ b = p * r \log_c c, & \log_c c = 1, \\ \log_c b = p * r, & \log_c b = \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b = \dfrac{log_c b}{\log_c a}, & \end{array}$$

8. W przypadku $c = b$ zamiana podstawy z liczbą logarytminowaną b prowadzi do odwrotności logarytmu

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla $c = b$ mamy

$$log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad bo \quad \log_b b = 1$$

Przykład 1.11 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_2 64, \qquad (ii) \quad \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \qquad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad bo \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \qquad \log_5 125 = \log_5 5^5 = 5 \quad bo \quad 5^5 = 125.$$

Przykład 1.12 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5},$$
$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5},$$
$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5),$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \frac{4\log_3 5}{\log_3 5} = 4$$
$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$$
$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \frac{1}{2} * \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

Przykład 1.13 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16),$$
$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4\ 16) = \log_2 2 \log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$
$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3 \log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

Zadanie 1.7 *Oblicz logarytm*

$$(i) \quad \log_3 81, \qquad (ii) \quad \log_7 16807$$

Zadanie 1.8 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$
$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$
$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

Zadanie 1.9 *Oblicz wartość wyrażeń logarytmicznych*

$$(i) \quad \log_5(\log_5\ 3125),$$
$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

1.6 Ròwnania logarutmiczne

Ròwnanie w ktòrym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się ròwnaniem logarytmicznym. Rozwiązując ròwnanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy okre:slić dziedzinę ròwnania. To jest ten zbiòr argumentu x dla ktòrego ròwnanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie ròwnania logarytmicznego szukamy jego pierwiastaka. Określenie dziedziny ròwnania jest istotne, ponieważ rozwiązując ròwnianie orginalne przekształcamy to ròwnania w ròwnania o prosztrzej strukturze, ktòre mogą mieċ pierwiastki z poza dziedziny ròwnania orginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania ròwnań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania ròwnań logarytmicznych.

Przykład 1.14 *Rozwiąż ròwnanie*

$$\log_2 x = 4$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę ròwnania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu x. Zatem dziedziną tego ròwnania jest zbiòr $x > 0$. piszemy

$$0 < x < \infty \quad lub \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika ròwnośċ

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x = 16 \in (0, \infty)$ należy do dziedziny ròwnania oraz

$$\log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4, \qquad \log_2 2 = 1.$$

Przykład 1.15 *Rozwiąż ròwnanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę ròwnania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad i \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego ròwnania jest zbiòr

$$x < 5 \;\; lub \;\; x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego ròwnania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \;\; lub \;\; x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5-x)+\log_3(5+x)=\log_3(5-x)(5+x)=2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5-x)(5+x)=3^2, \quad lub \;\; 25-x^2=9 \;\; lub \;\; x^2=16.$$

Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2}=|x|, \quad \sqrt{16}=4.$$

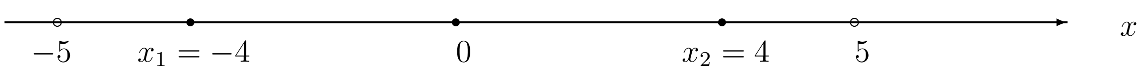
Skąd mamy dwa rozwiązania

$$gdy \quad |x|=4 \;\; to \quad x_1=-4 \quad lub \quad x_2=4.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie $x_1=-4\in(-5,5)$ i $x_2=4\in(-5,5)$ należy do dziedziny równania

$$\begin{aligned}\log_3(5+4)+\log_3(5-4) &= \log_3 9*1=\log_3 3^2=2\\ oraz &\\ \log_3(5-4)+\log_3(5+4) &= \log_3 1*9=\log_3 3^2=2.\end{aligned}$$

Zauważamy, że oba rozwiązania $x_1=-4\in(-5,5)$ i $x_2=4\in(-5,5)$ należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(-5,5)$

Przykład 1.16 *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(x--2)+\log_3(x-4)=1$$

Rozwiązanie:
Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x-2>0 \quad i \quad x-4>0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x>2 \;\; lub \;\; x>4.$$

Wtedy piszemy dziedzię tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x>4 \;\; lub \;\; x\in(4,\infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x-2) + \log_3(x-4) = \log_3(x-2)(x-4) = 1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x-2)(x-4) = 3^1, \quad lub \;\; x^2 - 6x + 8 = 3 \;\; lub \;\; x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:
Wyróżnik równania

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

o współczynnikach $a = 1, = -6, \; c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c = 6^2 - 4 * 1 * 5 = 36 - 20 = 16.$$

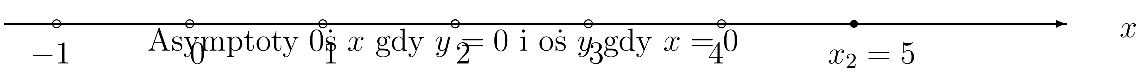
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek $x_1 = 1 \notin (4, \infty)$ nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek $x_2 = 5$ spełnia równanie

$$\log_3(5-2) + \log_3(5-4) \;\; = \;\; \log_3 3 * 1 = \log_3 3 = 1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek $x_2 = 5 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Asymptoty 0ś x gdy $y = 0$ i oś y gdy $x = 0$

Oś liczbowa. Dziedzina równania przedział otwarty $(4, \infty)$

Przykład 1.17 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(\log_4 \; x) = 1.$$

Rozwiązanie:
Dziedziną tego równania jest zbiór tych x dla których

$$\log_4 \; x > 1, \quad x > 4, \quad x \in (4, \infty)$$

Z definicji logarytmu wynika równość

$$\log_4 \; x = 2^1, \quad x = 4^2, \quad x = 16$$

Rozwiązanie $x = 16 \in (4, \infty)$ należy do dziedziny. Sprawdzamy, że $x = 16$ spełnia równanie

$$\log_2(\log_4 \; 16) = \log_2(\log_4 4^2) = \log_2(2 \log_4 4) = \log_2 2 = 1$$

1.6.1 Zadania

Zadanie 1.10 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4 x = 3$$

Zadanie 1.11 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

Zadanie 1.12 *Rozwiąż równanie*

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

Zadanie 1.13 *Rozwiąż równanie*

$$\log_4(\log_8\ x) = 1.$$