SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

Dwumian Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$$

Trȯjkąt Pascala

$$\begin{array}{lllllllllll}
(a+b)^0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
(a+b)^3 & \cdots & \cdots & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} &
\end{array}$$

DWUMIAN NEWTONA
TRȮJKĄT PASCALA

Prof. dr. Tadeusz STYŠ

Warszawa 2018[1]

[1] Projekt ȯsmy

Contents

0.1 Dwumian Newtona (1642-1727).

Jednym z najważniejszych i szeroko stosowanym wielomianem jest *Dwumian Newtona:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n\, b^0 + \binom{n}{1} a^n\, b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0\, b^n \qquad (1)$$

lub w Σ (sigma) notacji

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \qquad (2)$$

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ określamy w terminach silni

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n.$$

Mianowicie [2]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k+1)(k+2) * \cdots * (n-1)n}{(n-k)(n-k+1) * (n-k+2) * \cdots * (n-1)n}$$

Napiszmy Dwumian Newtona dla $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a+b, && n=1\\
(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2+2ab+b^2, && n=2\\
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = a^3+3a^2\, b+3ab^2+b^3, && n=3\\
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, && n=4\\
(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5, && n=5
\end{aligned}$$

Własności symbolu Newtona $\binom{n}{k}$.

Pierwsza własność

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Powyższa własność wynika bezpośrednio z definicji symbolu Newtona.
Mianowicie obliczmy, że

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! * n!} = 1, \quad oraz \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! * 0!} = 1, \qquad 0! = 1.$$

[2] Symbol Newtona opisany jest w projekcie Kombinatoryka

Druga własność to symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Istotnie, sprawdzamy, że

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Trzecia własność to suma symboli Newtona

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Przez proste obliczenia sprawdzamy powyższą własność sumy symboli Newtona

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} \\ \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{aligned}$$

Sumując stronami powyższe równości, otrzymamy

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{k+1}{n-k} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * (\frac{k+1}{n-k} + 1) \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} * \frac{n+1}{n-k} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Suma współczynników dwumianu Newtona

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Rzeczywiście przez podstawienie $a = 1$ i $b = 1$ do dwumianu Newtona otrzymamy

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

0.2 Trójkąt Pascala (1623-1662).

Trójkąt Pascala tworzą współczynnniki dwumianu Newtona.

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
(a+b)^5 & \cdots & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
(a+b)^6 & \cdots & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
(a+b)^7 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Obliczając wartości współczynników dwumianu Newtona ze wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

które podane są niżej w tabeli

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & & & & & \\
(a+b)^1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & 1 & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^3 & \cdots & & \cdots & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
(a+b)^4 & \cdots & & \cdots & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
(a+b)^5 & \cdots & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6 & \cdots & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Własności współczynników Newtona można łatwo odczytać z powyższych tabeli. Mianowicie, własność 1

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

jest widoczna, ponieważ skrajne wartości w każdym wierszy równają się 1. Również jest widoczna w tabeli własność 2, symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tabelę wartości współczynników Newtona w $n-tym$ wierszu tworzymay stosując własność 3, to jest wzór.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Na przykład, z wartości już obliczonych w wierszu $n-1$ obliczmy wartości w wierszu n

$$\begin{array}{llcll}
n=1, & k=0, & \binom{1}{0}+\binom{1}{1} & = & 1+1=2 & = & \binom{2}{1} \\
n=2, & k=0, & \binom{2}{0}+\binom{2}{1} & = & 1+2=3 & = & \binom{3}{1} \\
n=2, & k=1, & \binom{2}{1}+\binom{2}{2} & = & 2+1=3 & = & \binom{3}{2} \\
n=3, & k=0, & \binom{3}{0}+\binom{3}{1} & = & 1+3=4 & = & \binom{4}{1} \\
n=3, & k=1, & \binom{3}{1}+\binom{3}{2} & = & 3+3=6 & = & \binom{4}{2} \\
n=3, & k=2, & \binom{3}{2}+\binom{3}{3} & = & 3+1=4 & = & \binom{4}{3}
\end{array}$$

0.3 Jedomiany, dwumiany, trójmiany i wielomiany

Jednomianem nazywamy ciąg liczb lub ciąg liczb i liter lub ciąg tylko liter połączonych operacją mnożenia.
Dla przykładu wymieńmy kilka jednomianów

$$\begin{array}{ll}
125 & 247, \quad \textit{jedna liczba jest jednomianem} \\
2*5*7, & 3*4*5*6*7, \\
3*a*b & a*b*c, \\
4**5*x*y*z, & 5*a^2*b^3*c^4, \\
15*x^3*y^2*z^3 & 7*9*a^4*b^5*x^6*y^7.
\end{array}$$

Jasne, że każdy jednomian jest szczególnej postaci wyrażeniem arytmetycznym, jeżeli zawiera tylko liczby lub jest szczególnym wyrażeniem algebraicznym, jeżeli zawiera litery lub liczby i litery. Szczególnym wyrażeniem arytmetycznym lub algebraicznym, gdyż tylko operacja mnożenia występuje w ich określeniu.
Dwumianem nazywamy sumę dwóch jednomianów.
Na przykład

$$a+b, \quad a-b, \quad a^2+b^2, \quad 3x^3+5y^3.$$

Podobnie trójmianem nazywamy sumę trzech jednomianów.
Na przykład

$$\begin{array}{ll}
a+b+c, & 2*x_3+4*y^3+5*x*y, \\
a^2+2*a*b+b^2, & x^2-2*x*y+y^2.
\end{array}$$

Ogólnie wielomianem nazywamy sumę wielu jednomianów.
Natomiast, wielomianem stopnia n nazywamy sumę jednomianów następującej

postaci:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3 + \cdots + a_{n-1} * x^{n-1} + a_n * x^n$$

Wyrazy wielomianu piszmy również w odwrotnej kolejności pomijając znak mnożenia $*$.

$$p_n(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + a_{n-2}\ x^{n-2} + \cdots + a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0.$$

0.4 Wzory uproszczonego mnożenia

1. **Dwumian, dwumian kwadratowy i trójmian kubiczny.** Stosując dwumian Newtona łatwo sprawdzamy następujące tożsamości [3]

$$\begin{array}{rcll} (a \pm b)^1 & = & a \pm b, & \textit{dwumian stopnia } n = 1 \\ (a \pm b)^2 & = & a^2 \pm 2\ a\ b + b^2, & \textit{dwumian kwadratowy } n = 2 \\ (a \pm b)^3 & = & a^3 - 3\ a^2 * b + 3 * a * b^2 \pm b^3, & \textit{trojmian kubiczny } n = 3 \end{array}$$

Wzory na kwadrat sumy lub różnicy otrzymujemy przez mnożenie dwumianu $a \pm b$ przez siebie.
Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned} (a+b)^2 = (a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) &= a(a-b) - b(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2, \end{aligned}$$

2.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Podobnie sprawdzamy sześcian sumy lub różnicy.

[3] Tożsamością nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości parametrów. Tutaj parametry oznaczone są przez litery a i b

Mianowicie, obliczmy

$$\begin{aligned}(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2 &= a(a+b)^2+b(a+b)^2\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= (a^3+2a^2b+ab^2)+(ba^2+2ab^2+b^3)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a-b)^3=(a-b)(a-b)^2 &= a(a-b)^2-b(a-b)^2\\ &= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\ &= (a^3-2a^2b+ab^2)-(ba^2-2ab^2+b^3)\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\end{aligned}$$

3. **Suma kwadratów.**
   Suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych różnych od zera jest dodatnia i równa się zero wtedy i tylko wtedy, gdy obie liczby są równe zero. Mianowicie, piszemy

$$\begin{aligned}a^2+b^2>0, &\quad gdy \quad a\neq 0 \;\; lub \;\; b\neq 0,\\ a^2+b^2=0, &\quad gdy \quad a=0 \;\; i \;\; b=0.\end{aligned}$$

4. **Różnica kwadratów.**
   Różnica kwadratów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe. Mianowicie, mamy

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$(a-b)(a+b)=a(a+b)-b(a+b)=(a^2+ab)-(ba+b^2)=a^2-b^2.$$

5. **Suma sześcianów.**
   Suma sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3+b^3=(a+b))(a^2-ab+b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\ &= (a^3-a^2b+ab^2)+(ba^2-ab^2+b^3)=a^3+b^3.\end{aligned}$$

6. **Różnica sześcianów.**
   Różnica sześcianów dwóch liczb rzeczywistych rozkłada się na iloczyn

$$a^3 - b^3 = (a-b))(a^2 + ab + b^2).$$

Sprawdzamy ten wzór wykonując mnożenie

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= (a^3+a^2b+ab^2) - (ba^2+ab^2+b^3) = a^3 - b^3.\end{aligned}$$

0.5 Ćwiczenia

Przykład 0.1 *Wykonaj działanie*

$$\begin{array}{llll} (i) & (2a+3)^2, & (ii) & (\frac{x}{2}-4)^2, \\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (2x-3y)^3, \end{array}$$

Rozwiązanie. Stosując wzory, obliczamy

$$\begin{aligned} ad.(i) \quad (2a+3)^2 &= (2a)^2 + 2(2a)3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9. \\ sd.(ii) \quad (\frac{x}{2}-4)^2 &= (\frac{x}{2})^2 - 2(\frac{x}{2})(-4) + (-4)^2 \\ &= \frac{x^2}{4} - 4x + 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ad.(iii) \qquad (3a+2)^3 &= (3a)^3 + 3(3a)^2 2 + 3(3a)2^2 + 2^3 \\ &= 27a^3 + 54a^2 + 36a + 27. \\ ad.(iv) \qquad (2x-3y)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(-3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3. \end{aligned}$$

Zadanie 0.1 *Wykonaj działania*

$$\begin{array}{llll} (i) & \frac{(5a+2)^2}{(2a-3)^2}, & (ii) & (\frac{x^2}{3}-1)^2, \\ (ii) & (3a+2)^3, & (iv) & (\frac{3x-2y}{2x+3y})^3, \end{array}$$

Zadanie 0.2 *Uprość wyrażenie*

$$\begin{array}{ll} (i) & \frac{(a^2+b^2)(a^3-b^3)(a^3+b^3)}{[(a+b)^2+(a-b)^2](a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)} \\ (ii) & \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x^2} \end{array}$$