

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16

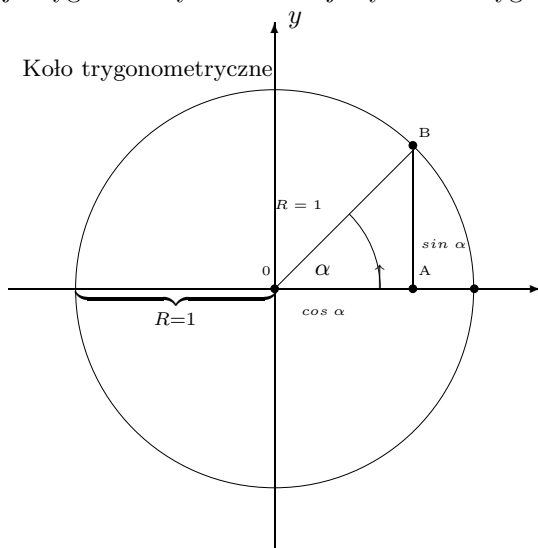
TEMAT 20: TYGONOMETRIA,

Koło trygonometryczne. Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.

pierwsza ćwiartka I

$$\sin \alpha = |AB|$$

$$\cos \alpha = |OA|$$



koło trygonometryczne

druga ćwiartka II

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = |AB|$$

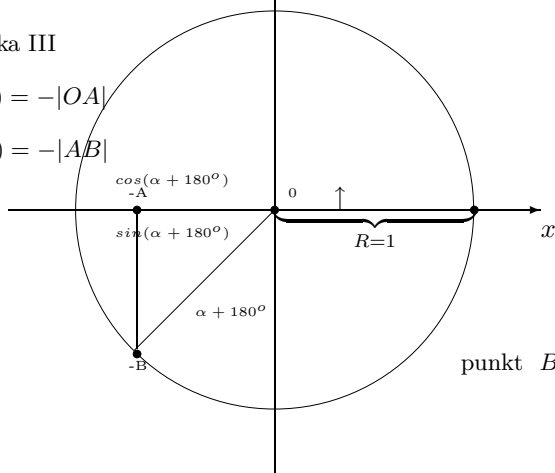
$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -|OA|$$

Koło trygonometryczne

trzecia ćwiartka III

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -|OA|$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -|AB|$$



czwarta ćwiartka IV

$$\sin(\alpha + 270^\circ) = -|AB|$$

$$\cos(\alpha + 270^\circ) = |OA|$$

# Contents

<b>1</b>	<b>Trygonometria</b>	<b>3</b>
1.1	Funkcje trygonometryczne . . . . .	3
1.2	Koło trygonometryczne. . . . .	6
1.2.1	Wzory redukcyjne . . . . .	7
1.3	Zadania . . . . .	9
1.3.1	Funkcje okresowe . . . . .	10
1.3.2	Zadania . . . . .	11
1.3.3	Wykresy funkcji trygonometrycznych . . . . .	12
1.4	Tożsamości trygonometryczne . . . . .	14
1.4.1	Jedynka trygonometryczna . . . . .	14
1.4.2	Zadania . . . . .	16
1.4.3	Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów $\alpha, \beta$ . . . . .	16
1.4.4	Wzory kąta podwójnego . . . . .	18
1.4.5	Wzory kąta połówkowego . . . . .	18
1.4.6	Funkcje trygonometryczne połowy kąta . . . . .	18
1.4.7	Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ . . . . .	19
1.4.8	Suma i różnica funkcji trygonometrycznych . . . . .	20
1.5	Równania trygonometryczne . . . . .	21
1.5.1	Zadania . . . . .	29
1.6	Nierówności trygonometryczne . . . . .	29
1.6.1	Nierówności podstawowe dla funkcji sinus . . . . .	29
1.6.2	Nierówności podstawowe dla funkcji cosinus . . . . .	30
1.6.3	Nierówności podstawowe dla funkcji tangens i cotangens . . . . .	32
1.7	Twierdzenie sinusów . . . . .	35
1.8	Twierdzenie cosinusów . . . . .	40
1.8.1	Zadania . . . . .	42
1.9	Funkcje cyklometryczne . . . . .	42
1.9.1	Arcus sinus . . . . .	43
1.9.2	Arcus cosinus . . . . .	44
1.9.3	Arcus tangens . . . . .	46
1.9.4	Arcus cotangens . . . . .	47
1.9.5	Zadania . . . . .	48

# Chapter 1

## Trygonometria

Trygonometria to wiedza o związkach miarowych pomiędzy bokami i kątami trójkątów. Takie znaczenie słowa *Trygonometria* było używane w czasach starożytnych w Babilonie, Egipcie i Grecji.

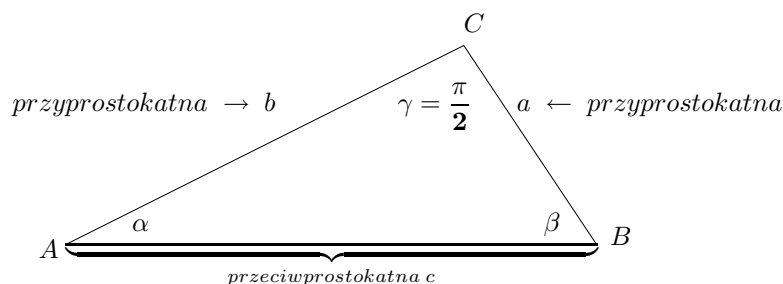
### 1.1 Funkcje trygonometryczne

- $\sin \alpha$ , czytamy sinus  $\alpha$ ,  $\cos \alpha$ , czytamy cosinus  $\alpha$ ,
- $\operatorname{tg} \alpha$  lub  $\tan \alpha$ , czytamy tangens  $\alpha$ ,
- $\operatorname{ctg} \alpha$  lub  $\operatorname{ctg} \alpha$ , czytamy cotangens  $\alpha$ ,
- $\sec \alpha$ , czytamy secant  $\alpha$ ,  $\operatorname{csc} \alpha$ , czytamy cosecant  $\alpha$ ,
- $\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$ , czytamy sinus hiperboliczny  $\alpha$ ,
- $\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$ , czytamy cosinus hiperboliczny  $\alpha$

Funkcje trygonometryczne określamy w trójkącie prostokątnym lub na kole trygonometrycznym.

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$  o wierzchołkach  $A, B, C$  przyprostokątnych  $AC$  i  $BC$  oraz przeciwprostokątnej  $AB$ .

1



Długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej oznaczamy małymi literami, piszemy

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|.$$

**Definicja 1.1** Sinus kąta  $\alpha$  to stosunek przyprostokątnej  $a$  leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$  do przeciwprostokątnej  $c$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

**Definicja 1.2** Cosinus kąta  $\alpha$  to stosunek przyprostokątnej  $b$  przyległej do kąta  $\alpha$  do przeciwprostokątnej  $c$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

**Definicja 1.3** Tangens kąta  $\alpha$  to stosunek przyprostokątnej  $a$  leżącej naprzeciw kąta  $\alpha$  do przyprostokątnej  $b$  przyległej do kąta  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{lub} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

**Definicja 1.4** Cotangens kąta  $\alpha$  to stosunek przyprostokątnej  $b$  leżącej przyległej do kąta  $\alpha$  do przyprostokątnej  $a$  leżącej na przeciw kąta  $\alpha$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$$

**Definicja 1.5** Secant kąta  $\alpha$  to odwrotność sinusa kąta  $\alpha$ . Zatem

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{c}{a}$$

**Definicja 1.6** Cosecant kąta  $\alpha$  to odwrotność cosinusa kąta  $\alpha$ . Zatem

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{c}{b}$$

Zauważmy, że odwrotność tangensa kąta  $\alpha$  równa jest cotangensowi kąta  $\alpha$  i odwrotność cotangensa kąta  $\alpha$  równa jest tangensowi kąta  $\alpha$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

<sup>1</sup>W matematyce wyższej funkcje trygonometryczne określane są przez szeregi potęgowe

**Przykład 1.1** Podaj wartości funkcji trygonometrycznych określonych w trójkącie prostokątnym o bokach  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$

**Rozwiązanie.** Kąty tego trójkąta prostokątnego  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{3}{5}, & \cos \alpha &= \frac{4}{5}, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{4}, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{4}{3}, & \operatorname{sec} \alpha &= \frac{5}{3}, & \operatorname{csc} \alpha &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym dotyczy tylko kątów

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ \quad \text{lub w mierze łukowej} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąty  $\alpha$  i  $\beta$  w trójkącie prostokątnym zmieniają się od zera do kąta prostego. W tym dla  $\alpha = 0$  cotangens i secant są nieokreślone.

Również dla  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  tangens i cosecant nie są określone.

Niżej podamy definicje funkcji trygonometrycznych na kole trygonometrycznym. Funkcje sinus i cosinus określone są dla wszystkich wartości rzeczywistych argumentu  $\alpha \in \{-\infty, \infty\}$ .

Natomiast funkcje tangens określona jest dla rzeczywistych wartości argumentu  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ; a funkcja cotangens określona jest dla wszystkich rzeczywistych wartości argumentu  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Wartości funkcji sinus i cosinus leżą w przedziale domkniętym  $[-1, 1]$ . wartości funkcji tangens i cotangens przebiegają cały zbiór liczb rzeczywistych od minus nieskończoności  $-\infty$  do plus nieskończoności  $\infty$ .

Znak wartości funkcji trygonometrycznych zależy od ćwiartki pierwszej I, drugiej II, trzeciej lub czwartej IV do której należy argument  $\alpha$ .

Dla określenia znaku wartości funkcji trygonometrycznych stosujemy heurystyczną zasadę:

*W pierwszej ćwiartce wszystkie są dodatnie sinus, cosinus, tangens i cotangens, w drugiej tylko sinus jest dodatni, w trzeciej tangens i cotangens są dodatnie, a w czwartej tylko cosinus jest dodatni.*

**Zadanie 1.1** Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego

$$(i) \quad \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$$

$$(ii) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$$

**Zadanie 1.2** Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego

$$(i) \quad \sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$(ii) \quad \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}$$

**Zadanie 1.3** Oblicz wartość wyrażenia trygonometrycznego

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$$

## 1.2 Koło trygonometryczne.

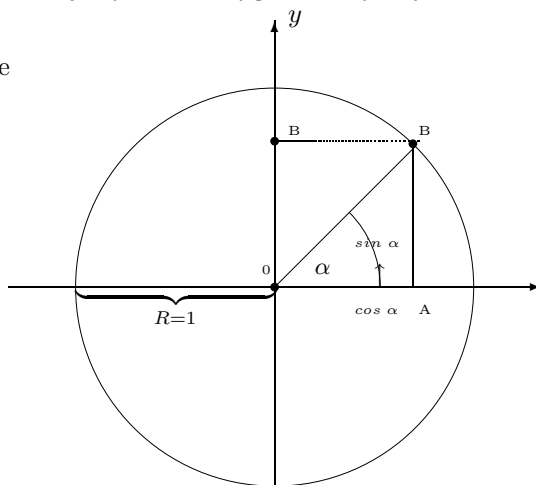
Dla wszystkich kątów o wartościach rzeczywistych, ujemnych lub dodatnich, funkcje trygonometryczne definiujemy w kole trygonometrycznym.

Koło trygonometryczne

pierwsza ćwiartka I

$$\sin \alpha = |AB|$$

$$\cos \alpha = |OA|$$

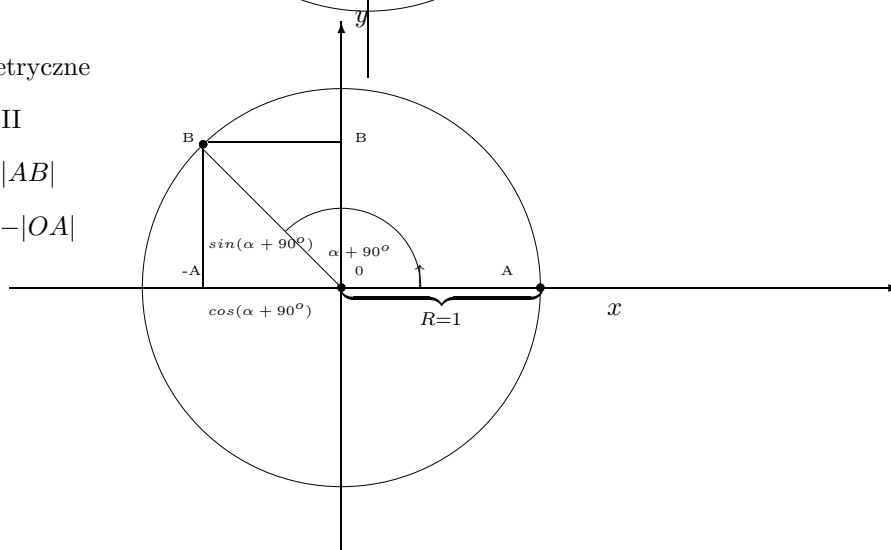


Koło trygonometryczne

druga ćwiartka II

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = |AB|$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -|OA|$$

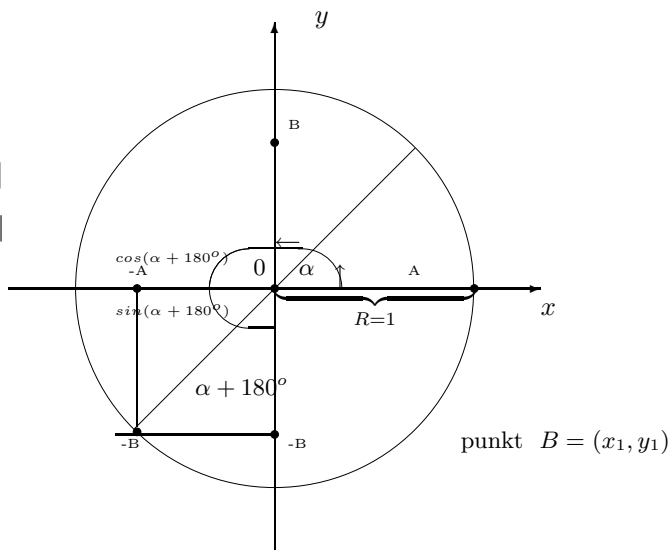


Koło trygonometryczne

trzecia ćwiartka III

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -|OA|$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -|AB|$$



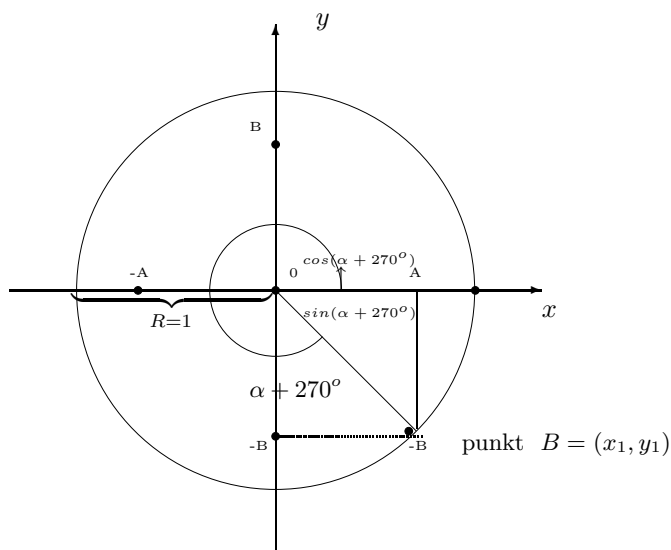
$x$

Koło trygonometryczne

czwarta ćwiartka IV

$$\sin(\alpha + 270^\circ) = -|AB|$$

$$\cos(\alpha + 270^\circ) = |OA|$$



**Definicja 1.7** Sinus kąta  $\alpha$  to stosunek współrzędnej  $y_1$  do promienia  $R$

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{R}$$

**Definicja 1.8** Cosinus kąta  $\alpha$  to stosunek współrzędnej  $x_1$  do promienia  $R$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{R}$$

**Definicja 1.9** Tangens kąta  $\alpha$  to stosunek współrzędnej  $y_1$  do współrzędnej  $x_1$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad x_1 \neq 0,$$

**Definicja 1.10** Cotangens kąta  $\alpha$  to stosunek współrzędnej  $x_1$  do współrzędnej  $y_1$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

**Definicja 1.11** Secant kąta  $\alpha$  to odwrotność sinusa kąta  $\alpha$ . Zatem

$$\sec \alpha = \frac{R}{y_1}, \quad y_1 \neq 0,$$

**Definicja 1.12** Cosecant kąta  $\alpha$  to odwrotność cosinusa kąta  $\alpha$ . Zatem

$$\operatorname{csc} \alpha = \frac{R}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

Ponieważ secant i cosecant określone są przez sinus i cosinus, dlatego dalej wystarczy rozpatrywać cztery funkcje trygonometryczne sinus, cosinus, tangens i cotangens.

### 1.2.1 Wzory redukcyjne

Wprost z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że wszystkie funkcje są nieujemne w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż dla kąta

$$0 \leq \alpha \leq 90^\circ,$$

współrzędne punktu  $p = (x_1, y_1)$  są nieujemne, to jest  $x_1 \geq 0$ ,  $y_1 \geq 0$  i promień  $R > 0$ .

W drugiej ćwiartce tylko sinus ( $\sin \alpha \geq 0$ ), jest nieujemny, gdyż współrzędna  $y_1 \geq 0$ .

W trzeciej ćwiartce tangens i cotanges ( $\operatorname{tg} \alpha \geq 0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha \geq 0$ ), są nieujemne, gdyż obie współrzędne  $x_1 \leq 0$ ,  $y_1 \leq 0$  są ujemne i wtedy iloraz ( $\frac{y_1}{x_1} \geq 0$ ) lub ( $\frac{x_1}{y_1} \geq 0$ ).

W czwartej ćwiartce tylko cosinus ( $\cos \alpha \geq 0$ ) jest nieujemny, gdyż współrzędna  $x_1 \geq 0$ .

W tej pozycji kąta  $\alpha$ , z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$0 \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\sin \alpha \geq 0$	$\cos \alpha \geq 0$	$\operatorname{tg} \alpha \geq 0$	$\operatorname{ctg} \alpha \geq 0$
$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$\sin \alpha \geq 0$	$\cos \alpha \leq 0$	$\operatorname{tg} \alpha \leq 0$	$\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$
$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$	$\sin \alpha \leq 0$	$\cos \alpha \leq 0$	$\operatorname{tg} \alpha \geq 0$	$\operatorname{ctg} \alpha \geq 0$
$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$	$\sin \alpha \leq 0$	$\cos \alpha \geq 0$	$\operatorname{tg} \alpha \leq 0$	$\operatorname{ctg} \alpha \leq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta  $\alpha$  osiągają już w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego wszystkie możliwe wartości bezwzględne (z dokładnością do znaku). Zatem, inne wartości różnią się od nich jedynie znakiem. Te różnice ustalają wzory redukcyjne, które podajemy niżej.

Najpierw, zauważmy, że jeżeli kąt  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  leży w pierwszej ćwiartce to kąt  $90^\circ - \alpha$  też leży w pierwszej ćwiartce oraz kąt  $90^\circ + \alpha$  leży w drugiej ćwiartce. Natomiast, kąt  $-\alpha$  leży w czwartej ćwiartce. W tej pozycji kąta  $\alpha$ , z wykresu koła trygonometrycznego odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych zapisane w niżej podanej tabeli

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

Teraz, zauważmy, że jeżeli kąt  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  leży w pierwszej ćwiartce to kąt  $180^\circ - \alpha$  leży w drugiej ćwiartce oraz kąt  $180^\circ + \alpha$  leży w trzeciej ćwiartce.

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

Zauważmy podobnie, że jeżeli kąt  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$  leży w pierwszej ćwiartce to kąt  $270^\circ - \alpha$  leży w trzeciej ćwiartce oraz kąt  $180^\circ + \alpha$  leży w czwartej ćwiartce. Zatem, mamy następujące wzory redukcyjne:

$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$



Niżej w tablicy podajemy zebrane wzory redukcyjne w mierze łukowej kątów.

Kąt	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

### 1.3 Zadania

**Zadanie 1.4** Długości boków trójkąta prostokątnego  $\triangle ABC$  są równe, odpowiednio

$$a = |BC| = 6, \quad b = |AC| = 8, \quad c = |AB| = 10$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha, \quad \sin \beta, \quad \cos \alpha, \quad \cos \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \beta$$

kątów  $\alpha, \beta$  leżących naprzeciw odpowiednich boków  $BC, AC$ .

**Zadanie 1.5** (i) Narysuj położenie punktów

$$p = (p_1, p_2) = (\sqrt{3}, 1), \quad q = (q_1, q_2) = (-\sqrt{3}, -1).$$

na kole trygonometrycznych o promieniu  $R = 2$ .

(ii) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$(a) \quad \sin 30^\circ = \frac{p_2}{R} \qquad \sin 60^\circ = \frac{p_1}{R}$$

$$(b) \quad \cos 30^\circ = \frac{p_1}{R} \qquad \cos 60^\circ = \frac{p_2}{R}$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{p_2}{p_1} \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{p_1}{p_2}$$

$$(d) \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{p_1}{p_2} \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{p_2}{p_1}$$

(iii) Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$(a) \quad \sin 210^\circ = \frac{q_2}{R} \qquad \sin 240^\circ = \frac{q_1}{R}$$

$$(b) \quad \cos 210^\circ = \frac{q_1}{R} \qquad \cos 240^\circ = \frac{q_2}{R}$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{q_2}{q_1} \qquad \operatorname{tg} 240^\circ = \frac{q_1}{q_2}$$

$$(d) \quad \operatorname{ctg} 210^\circ = \frac{q_1}{q_2} \qquad \operatorname{ctg} 240^\circ = \frac{q_2}{q_1}$$

**Zadanie 1.6** Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$(a) \quad \sin 120^\circ \qquad \sin 150^\circ$$

$$(b) \quad \cos 120^\circ \qquad \cos 150^\circ$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} 120^\circ \qquad \operatorname{tg} 150^\circ$$

$$(d) \quad \operatorname{ctg} 120^\circ \qquad \operatorname{ctg} 150^\circ$$

**Zadanie 1.7** Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{ll} (a) \sin 210^\circ & \sin 240^\circ \\ (b) \cos 210^\circ & \cos 240^\circ \\ (c) \operatorname{tg} 210^\circ & \operatorname{tg} 240^\circ \\ (d) \operatorname{ctg} 210^\circ & \operatorname{ctg} 240^\circ \end{array}$$

**Zadanie 1.8** Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz wartości funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{ll} (a) \sin 300^\circ & \sin 330^\circ \\ (b) \cos 300^\circ & \cos 330^\circ \\ (c) \operatorname{tg} 300^\circ & \operatorname{tg} 330^\circ \\ (d) \operatorname{ctg} 300^\circ & \operatorname{ctg} 330^\circ \end{array}$$

**Zadanie 1.9** (i) Oblicz okres następującej funkcji:

$$\begin{array}{ll} (a) f(x) = \sin \frac{1}{3}x, & (b) f(x) = \cos \frac{1}{3}x. \\ (c) f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{3}x, & (d) f(x) = \operatorname{ctg} \frac{1}{3}x. \end{array}$$

**Zadanie 1.10** Narysuj wykres funkcji

$$\begin{array}{ll} (i) f(x) = \sin \frac{1}{3}x, & \text{dla } 0 \leq x \leq 6\pi \\ (ii) f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{3}x & \text{dla } -3\pi \leq x \leq 3\pi \\ (iii) f(x) = \operatorname{ctg} \frac{4}{3}x & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \end{array}$$

### 1.3.1 Funkcje periodyczne

Funkcja  $f(x)$  jest periodyczna, jeżeli istnieje liczba dodatnia  $\omega > 0$  taka, że

$$f(x + \omega) = f(x), \quad (1.1)$$

dla każdej rzeczywistej wartości argumentu należącego do dziedziny  $x \in D$ .<sup>2</sup>

Jasne, że jeżeli funkcja  $f(x)$  jest periodyczna o okresie  $\omega > 0$ , to zachodzi następująca tożsamość:

$$f(x + k\omega) = f(x), \quad x \in D,$$

dla każdego całkowitego  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Okresem funkcji  $f(x)$  nazywamy najmniejszą z liczb  $\omega > 0$ , która spełnia tożsamość (1.1).<sup>3</sup>

Niżej sprawdzimy, że funkcje trygonometryczne są periodyczne.

Mianowicie, zauważamy, że jeżeli promień  $R$  obróci się o  $360^\circ$  lub w mierze łukowej o  $2\pi$ ,

<sup>2</sup>Dziedziną funkcji  $f(x)$  nazywamy zbiór argumentów  $x$  dla których  $f(x)$  jest określona

<sup>3</sup>Tożsamość znaczy, że równość zachodzi dla wszystkich wartości  $x$  w dziedzinie tożsamości  $x \in D$ .

to punkt  $p = (x_1, y_1)$  wróci do pozycji wyjściowej. Co więcej, jeżeli promień  $R$  obróci się w kierunku dodatnim lub ujemnym o wielokrotność okresu  $\omega = 360^\circ$  lub w mierze łukowej o wielokrotność  $\omega = 2\pi$ , to punkt  $p = (x_1, y_1)$  też wróci do pozycji wyjściowej. Okresem funkcji sinus i cosinus jest liczba  $\omega = 360^\circ$  lub w mierze łukowej liczba  $\omega = 2\pi$ . Natomiast, dla funkcji tangens i cotangens okresem jest liczba mniejsza  $\omega = 180^\circ$  lub w mierze łukowej  $\omega = \pi$ . Istotnie, funkcje tangens i cotangens osiągają te same wartości w pierwszej i w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego, gdyż

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y_1}{-x_1}, \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{-x_1}{-y_1}, \quad x_1 \neq 0, y_1 \neq 0.$$

**Przykład 1.2** Oblicz okres następującej funkcji:

$$f(x) = \sin \frac{3}{2}x$$

**Rozwiązanie.** Wiemy, że funkcja sinus ma okres  $2\pi$ . Zatem okresem funkcji  $f(x)$  jest liczba  $\omega$  taka, że

$$f(x + \omega) = \sin \frac{3}{2}(x + \omega) = \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\omega\right) = \sin \frac{3}{2}x = f(x)$$

dla każdego rzeczywistego  $x$ .

Skąd obliczamy okres

$$\frac{3}{2}\omega = 2\pi, \quad \omega = \frac{4}{3}\pi$$

Sprawdzamy, że okresem funkcji  $f(x)$  jest liczba  $\omega = \frac{4}{3}\pi$ . Istotnie, mamy równość

$$\begin{aligned} f(x + \omega) = f\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) &= \sin \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x + 2\pi\right) = \sin \frac{3}{2}x = f(x). \end{aligned}$$

### 1.3.2 Zadania

**Zadanie 1.11** Oblicz okres funkcji

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sin \frac{\pi x}{2} \\ (ii) \quad & \cos \frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

**Zadanie 1.12** Podaj wykres funkcji

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sin \frac{\pi x}{4}, \quad -4\pi \leq x \leq 4\pi \\ (ii) \quad & \cos \frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 8\pi. \end{aligned}$$

**Zadanie 1.13** Oblicz okres funkcji

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sin \frac{2\pi x}{3} \\ (ii) \quad & \cos \frac{2\pi x}{3} \end{aligned}$$

**Zadanie 1.14** Podaj wykres funkcji

$$(i) \quad \sin \frac{2\pi x}{3}, \quad -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \cos \frac{2\pi x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 3\pi.$$

**Zadanie 1.15** Oblicz okres funkcji

$$(i) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$$

$$(ii) \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$$

**Zadanie 1.16** Podaj wykres funkcji

$$(i) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$(ii) \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 4\pi.$$

### 1.3.3 Wykresy funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus określone są na całej osi liczbowej, dla wszystkich wartości rzeczywistych  $x \in (-\infty, \infty)$ . Również są funkcjami periodycznymi o tym samym okresie  $\omega = 2\pi$ .

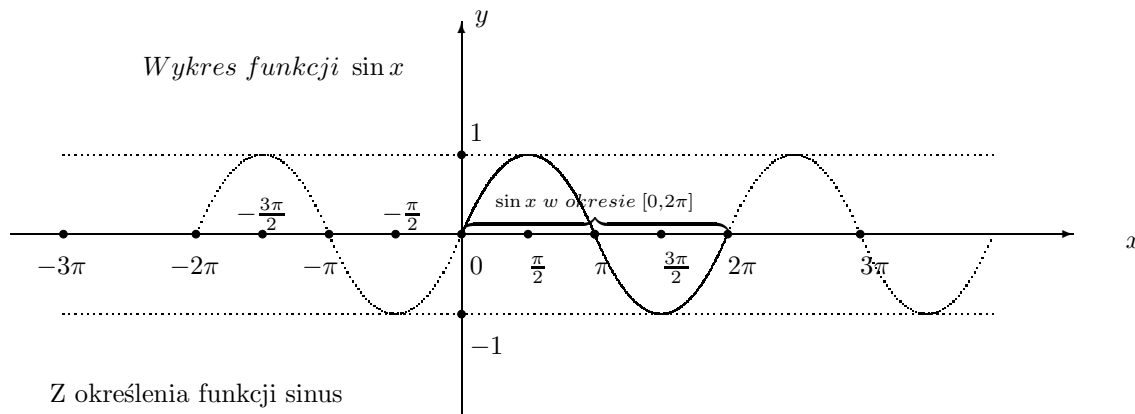
To znaczy, że te funkcje spełniają tożsamość <sup>4</sup>

$$f(x + 2\pi) \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x),$$

$$g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) \cos x = g(x)$$

dla każdego  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Wykreślając funkcje trygonometryczne argument odkładamy na osi  $x$ , jak na rysunku.



$$|\sin x| = \left| \frac{y_1}{R} \right| \leq 1, \quad \text{gdys } R \geq |y_1|, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty.$$

<sup>4</sup>Tożsamość to znaczy, że zachodzi równość pomiędzy lewą i prawą stroną równania dla wszystkich wartości zmiennej  $x$ .

Wartości funkcji sinus nie przekraczają przedziału  $[-1, 1]$ . To znaczy, że dla wszystkich wartości argumentu  $-\infty < x < \infty$  spełniona jest nierówność

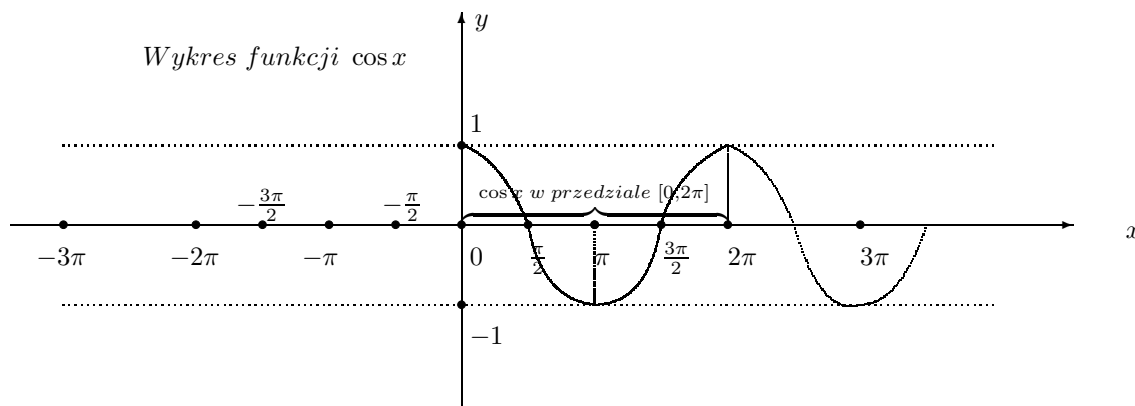
$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Istotnie, z określenia funkcji sinus

$$|\sin x| = \left| \frac{y_1}{R} \right| \leq 1, \quad \text{gdz } R \geq |y_1|, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty.$$

Podobnie, funkcja cosinus jest periodyczna o okresie  $2\pi$  i określona dla wszystkich rzeczywistych wartości kąta  $-\infty < x < \infty$ . Jej wartości nie przekraczają przedziału  $[-1, 1]$ , gdyż z określenia funkcji cosinusa

$$|\cos x| = \left| \frac{x_1}{R} \right| \leq 1, \quad \text{gdz } R \geq |x_1|, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty.$$

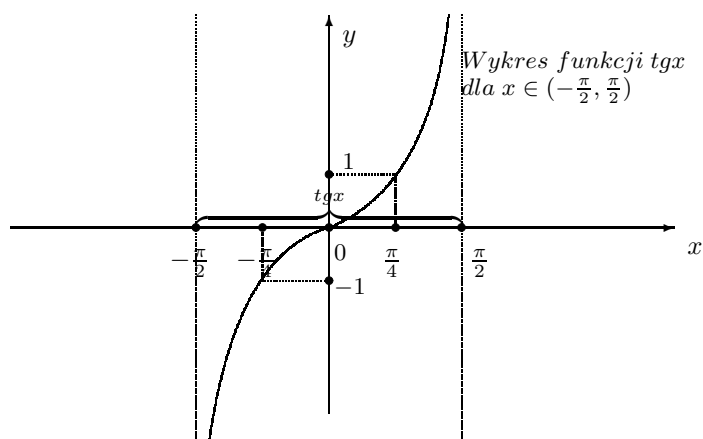


Funkcje trygonometryczne tangens i cotangens są periodyczne o okresie  $\omega = \pi$ . Istotnie, kąt  $x + \pi$  leży w trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego. Z tabeli odczytujemy wartość  $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}x$ . Zatem, prawdziwa jest następująca tożsamość:

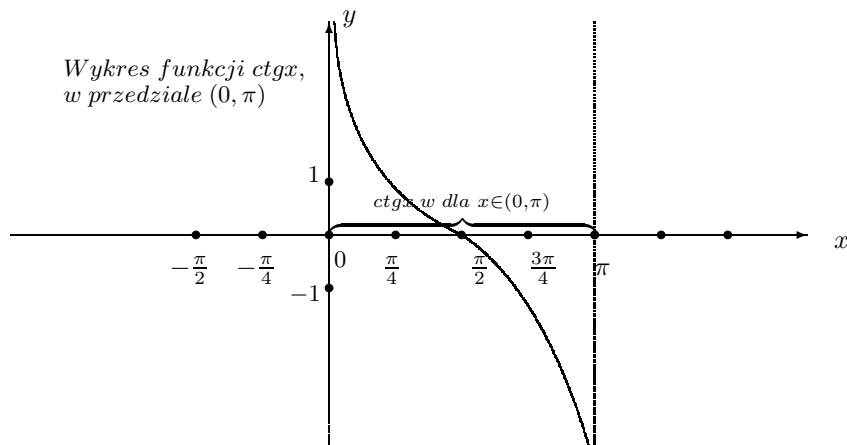
$$f(x + \pi) = \text{tg}(x + \pi) = \text{tg}x = f(x),$$

dla każdego argumentu w dziedzinie funkcji tangens

$$x \in D = \left\{ x : x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$



Wykres funkcji cotangens dla  $x \neq k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;



## 1.4 Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, która jest prawdziwa dla wszystkich wartości kątów w dziedzinie tożsamości. W odróżnieniu od tożsamości, równanie trygonometryczne jest spełnione tylko dla niektórych wartości kątów z dziedziny równania. Podobnie, wzory trygonometryczne są tożsamościami dla wszystkich wartości kątów z dziedziny ich określenia.

### 1.4.1 Jedyńska trygonometryczna

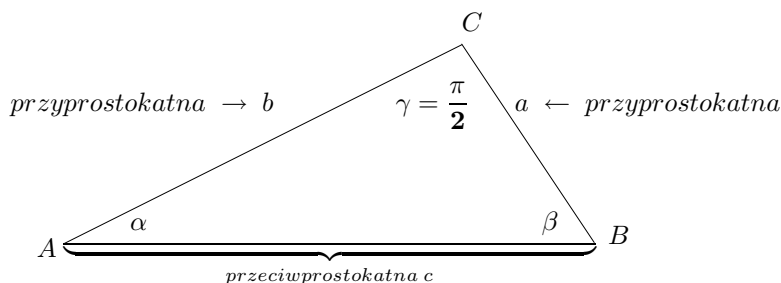
Jedyńska trygonometryczna to jest tożsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dla wszystkich wartości rzeczywistych kąta  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ .

Wprost z definicji funkcji sinus i cosinus obliczamy przyprostokątne  $a$  i  $b$  trójkąta prostokątnego  $\triangle ABC$

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$



Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że suma kwadratów przyprostokątnych równa jest kwadratowi przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

Po podstawieniu  $a = c * \sin \alpha$ ,  $b = c * \cos \alpha$  otrzymamy

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2,$$

$$c^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2 \quad | : c^2,$$

Skąd wynika tożsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dla każdej wartości  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ . To jest jedynka trygonometryczna.

Z jedynki trygonometrycznej wynikają następujące tożsamości:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{csc}^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Istotnie, z definicji funkcji tangens wynika równość

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{csc}^2 \alpha.$$

dla każdego kąta  $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ; dla którego

$$\cos \alpha \neq 0.$$

5

Podobnie z definicji funkcji cotangens wynika równość

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{sec}^2 \alpha.$$

dla każdego kąta  $\alpha \neq k * \pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ; dla którego

$$\sin \alpha \neq 0.$$

To znaczy dla kąta  $\alpha$  ze zbioru określoności funkcji cotangens. <sup>6</sup>

<sup>5</sup>Nieparzystą wielokrotność kąta prostego piszemy  $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

<sup>6</sup>Parzystą wielokrotność kąta prostego piszemy  $2k * \frac{\pi}{2} = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

## 1.4.2 Zadania

**Zadanie 1.17** Sprawdź tożsamość

$$\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x \quad \infty < x < \infty.$$

**Zadanie 1.18** Sprawdź tożsamość

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos^2 x = 1 \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Zadanie 1.19** Sprawdź tożsamość

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Zadanie 1.20** Wykaż, że

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$$

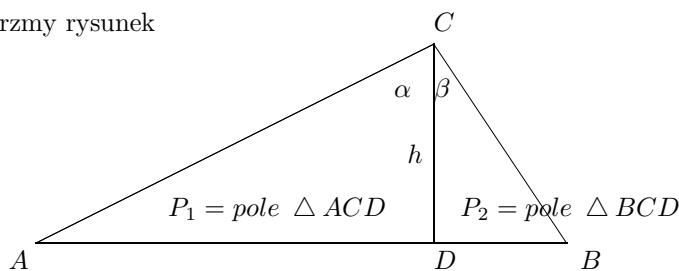
dla każdej rzeczywistej wartości kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

## 1.4.3 Funkcje sinus i cosinus sumy i różnicy kątów $\alpha$ , $\beta$

Niżej wyprowadzimy wzory na sumę i różnicę dwóch kątów

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha, \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rozpatrzmy rysunek



Wysokość  $h$  trójkąta  $\triangle ABC$

Zauważamy, że

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|AD|}{|AC|}, & \sin \beta &= \frac{|DB|}{|BC|}, \\ \cos \alpha &= \frac{h}{|AC|}, & \cos \beta &= \frac{h}{|BC|}, \\ h &= |AC| \cos \alpha, & h &= |BC| \cos \beta \end{aligned}$$

Pole  $P$  trójkąta  $\triangle ABC$  jest sumą pola  $P_1$  trójkąta  $\triangle ADC$  i pola  $P_2$  trójkąta  $\triangle DBC$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}|AC| |BC| \sin((\alpha + \beta)) \tag{1.3}$$



Z drugiej strony, wiemy, że

$$P_1 = \frac{1}{2}|AC| h \sin \alpha, \quad P_2 = \frac{1}{2}|BC| h \sin \beta, \quad (1.4)$$

Porównując pola określone przez równości (1.3) i (1.4) otrzymamy wzór na sinus sumy dwóch kątów  $\alpha$  i  $\beta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|AC| |BC| \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2}|AC| h \sin \alpha + \frac{1}{2}|BC| h \sin \beta, \\ |AC| |BC| \sin(\alpha + \beta) &= |AC| |BC| \cos \beta \sin \alpha + |AC| |BC| \cos \alpha, \end{aligned}$$

*Skąd sinus sumy*

$$\sin(\alpha + \beta) = \underbrace{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}_{\sin(\alpha + \beta)}$$

Pozostałe wzory wyprowadzamy korzystając ze wzorów redukcyjnych.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cos \alpha \\ &= \underbrace{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}_{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) &= \sin((90^\circ - \alpha) - \beta) \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \sin \beta \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= \underbrace{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}_{\cos(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha - \beta)) &= \sin((90^\circ - \alpha) + \beta) \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin \beta \cos(90^\circ - \alpha), \\ &= \underbrace{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}_{\cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Wzory na tangens i cotangens sumy i różnicy dwóch kątów wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\underbrace{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}_{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}}$$

$$\text{dla } \alpha + \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\underbrace{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}_{\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)}}$$

$$\text{dla } \alpha + \beta \neq k \pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Podobnie wyprowadzamy wzory na tangens i cotangens różnicy dwóch kątów.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\underbrace{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}_{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}}$$

dla  $\alpha - \beta \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\underbrace{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}_{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)}}$$

dla  $\alpha - \beta \neq k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

#### 1.4.4 Wzory kąta podwójonego

Wzory kąta podwójonego wynikają bezpośrednio z powyższych wzorów na sumę. Mianowicie, dla  $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \text{dla } \alpha \in (-\infty, \infty) \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \text{dla } \alpha \in (-\infty, \infty) \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{dla } \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \text{dla } \alpha \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;\end{aligned}$$

#### 1.4.5 Wzory kąta połówkowego

Wzory kąta połówkowego otrzymujemy przez podstawienie do powyższych wzorów zamiast  $\alpha$  połowę kąta  $\frac{1}{2}\alpha$ , wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha, \quad \alpha \in (-\infty, \infty), \\ \cos \alpha &= \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha, \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1 \\ &\alpha \in (-\infty, \infty), \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2}\alpha}, \quad \text{dla } \alpha \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;\end{aligned}$$

#### 1.4.6 Funkcje trygonometryczne połowy kąta

Z powyższych wzorów kąta połówkowego bezpośrednio wynikają wzory połowy kąta. Mianowicie, obliczając cosinus i sinus ze wzorów

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$$

otrzymamy wzory cosinusa i sinusa na połowę kąta  $\alpha$

$$|\cos \frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad |\sin \frac{1}{2}\alpha| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

dla  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ .

Wzory połowy kąta dla tangensa i cotangensa wynikają bezpośrednio z definicji tych funkcji i wzorów dla sinusa i cosinusa

$$|\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha| = \left| \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \right| = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

dla  $\alpha \neq (2k + 1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

Cotangens jest odwrotnością tangensa, zatem

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

dla  $\alpha \neq 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;

### 1.4.7 Wyrażenie funkcji trygonometrycznych przez $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$

Oznaczmy przez

$$t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \quad \text{dla } \alpha \neq (2k + 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Wtedy funkcje trygonometryczne kąta  $\alpha$  można zapisać w postaci następujących wymierzeń wymiernych zmiennej  $t$ .

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2t}{1 + t^2}, & \cos \alpha &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, & -\infty < t < \infty, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2t}{1 - t^2}, & t \neq -1, 1, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1 - t^2}{2t} & t \neq 0. \end{aligned}$$

Istotnie, wiemy, że

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha + \cos^2 \frac{1}{2}\alpha} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Podobnie funkcja cosinus

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha \\ &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha + \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Dla funkcji tangens i cotangens wzory płowy kąta wynikają wprost z ich definicji i wyżej podanych wzorów dla funkcji sinus i cosinus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t \neq -1, 1$$

Cotanges jest odwrotnością tangensa. Zatem wzór dla cotangensa

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \quad t \neq 0.$$

### 1.4.8 Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Niżej podajemy następujące wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Powyższe wzory wynikają ze wzorów (1.4) sinusa i cosinusa sumy i różnicy kątów. Mi-anowicie, wprowadzamy nowe zmienne

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x - y, \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

Korzystając ze wzorów (1.4) na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów zauważamy, że

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha + \sin \beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y) \\
 &= (\sin x \cos y + \sin y \cos x) + (\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\
 &= 2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
 &= (\sin x \cos y + \sin y \cos x) - (\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\
 &= 2 \sin y \cos x = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\
 &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
 &= 2 \cos x \cos y = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= \cos(x+y) - \cos(x-y) \\
 &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\
 &= -2 \sin x \sin y = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.
 \end{aligned}$$

Wzory sumy i różnicy tangensa i cotangensa wynikają wprost z definicji powyższych wzorów dla sinusa cosinusa.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\
 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}, \\
 &= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Podobnie wprowadzamy wzór dla sumy i różnicy cotangensów

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\
 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}
 \end{aligned}$$

## 1.5 Równania trygonometryczne

Zacznijmy od najprostrzych równań trygonometrycznych, rozwiązania których są częścią rozwiązań bardziej złożonych równań.

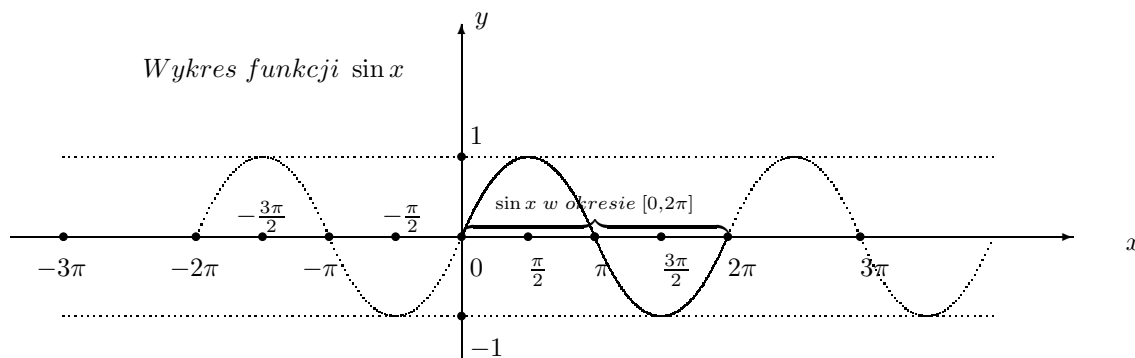
**Przykład 1.3** *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$(i) \quad \sin x = 0, \quad (ii) \quad |\sin x| = 1.$$

**Rozwiązanie (i).** Głównymi pierwiastkami tego równania, to znaczy zerami funkcji sinus w jej okresie od 0 do  $360^\circ$  lub w mierze łukowej w zakresie od  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  są rozwiązania

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

To rozwiązanie jest zaznaczo na wykresie funkcji  $y = \sin x$ .



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi,$$

dla parzystych i dla nieparzystych  $k$ . To znaczy, że wszystkie rozwiązania są wielokrotnością liczby  $\pi$ ,

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Rozwiązanie (ii).** Głównymi pierwiastkami równania

$$|\sin x| = 1, \quad \text{lub} \quad \sin x = 1 \quad \text{lub} \quad \sin x = -1.$$

są liczby

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji sinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + \pi + 2k\pi$$

dla parzystych i dla nieparzystych  $k$ . To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

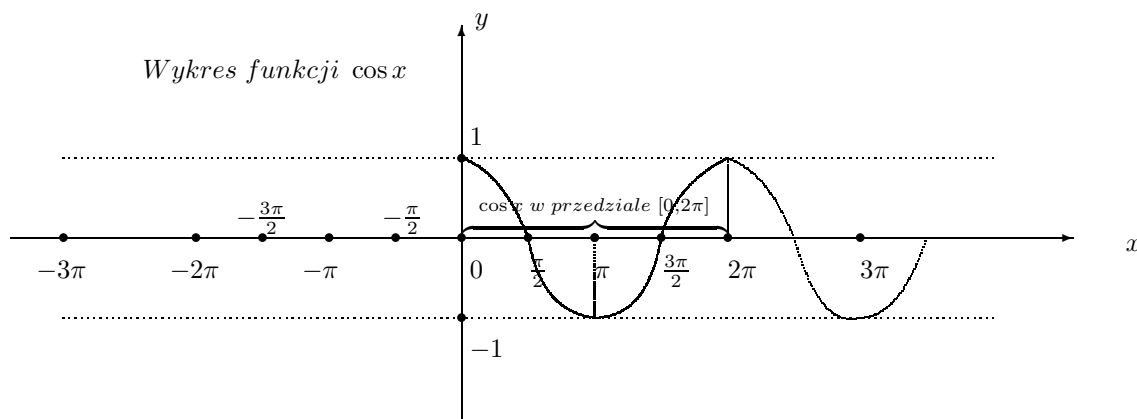
**Przykład 1.4** Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$(i) \quad \cos x = 0, \quad (ii) \quad |\cos x| = 1.$$

**Rozwiązanie (i).** Głównymi pierwiastkami tego równania, to znaczy zerami funkcji cosinus w jej okresie od 0 do  $360^\circ$  lub w mierze łukowej w zakresie od  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  są rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

To rozwiązanie jest zaznaczone na wykresie funkcji  $y = \cos x$ .



Wszystkie rozwiązanie dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania są następującej postaci:

$$x_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Rozwiązanie (ii).** Głównymi pierwiastkami równania

$$|\cos x| = 1, \quad \text{lub} \quad \cos x = 1 \quad \text{lub} \quad \cos x = -1.$$

są liczby

$$x = 0, \quad \text{lub} \quad x = \pi.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cosinus. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \pi + 2k\pi = (2k + 1)\pi,$$

To znaczy, że wszystkie rozwiązania dla parzystych i nieparzystych  $k$ , są następującej postaci:

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Zauważmy, że sinus i cosinus kątów  $\alpha_k = k\pi$  lub  $\alpha_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$  możemy napisać w następującej postaci potęgi minus jedynki:

$$\sin(2k + 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \quad \cos k\pi = (-1)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Przykład 1.5** Znajdź wszystkie rozwiązania równania

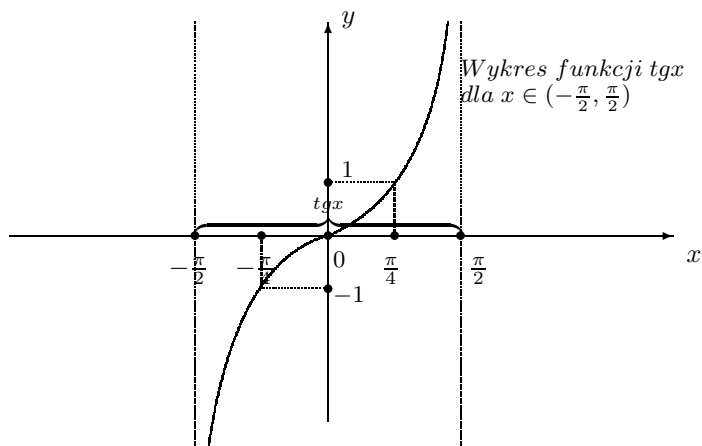
$$(i) \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad (ii) \quad |\operatorname{tg} x| = 1.$$

$$(iii) \quad \operatorname{ctg} x = 0, \quad (iv) \quad |\operatorname{ctg} x| = 1.$$

**Rozwiązanie (i).** Ponieważ okresem funkcji tangens jest liczbą  $\pi$ , to głównym pierwiastkiem równania

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

jest  $x = 0$ . Wtedy również  $\sin x = 0$ .



Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Rozwiązanie (ii).** W zakresie okresu funkcji tangens od  $-\frac{\pi}{2}$  do  $\frac{\pi}{2}$  są dwa pierwiastki główne równania

$$|\operatorname{tg} x| = 1, \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} x = 1, \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji tangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

lub zapisane w postaci jednego wzoru

$$x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Rozwiązanie (iii).** Zauważmy, że  $x = \frac{\pi}{2}$  jest pierwiastkiem głównym równania

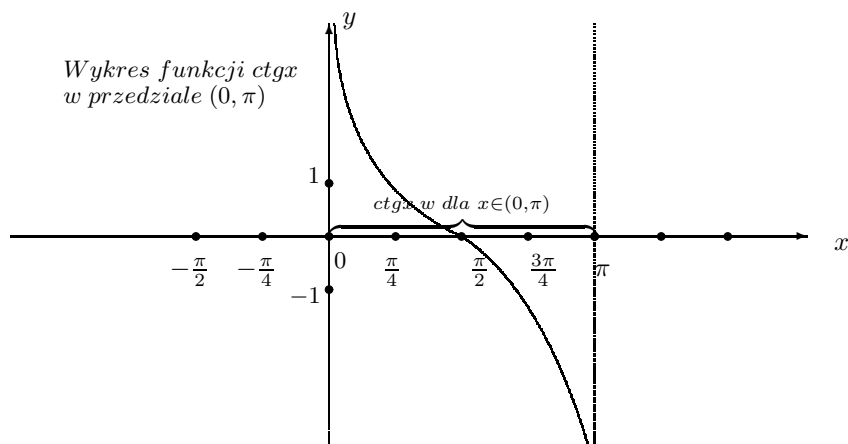
$$\operatorname{ctg} x = 0,$$

Ten pierwiastek główny zaznaczony został na wykresie funkcji

$$y = \operatorname{ctg} x$$

w przedziale  $(0, \pi)$





Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastka głównego wielokrotność okresu funkcji cotangens. Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Rozwiązanie (iv).** Głównymi pierwiastkami równania

$$|\operatorname{ctg}x| = 1,$$

lub równań równoważnych

$$\operatorname{ctg} x = 1, \quad i \quad \operatorname{ctg}x = -1.$$

są liczby rzeczywiste

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Wszystkie rozwiązania dostaniemy dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu funkcji cotangens.

Zatem wszystkie rozwiązania mają następującą postać:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k + 1)\frac{\pi}{4},$$

lub

$$x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi = (4k + 3)\frac{\pi}{4}$$

dla  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

**Sprawdzenie.** Podstawiając do równania  $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$  lub  $x_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi$  otrzymamy

$$\operatorname{ctg} x_k = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

$$\operatorname{ctg} x_k = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Niżej w tabelicy podane są wartości funkcji trygonometrycznych kątów wybranych.

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha = 0$	0	1	0	$\infty$
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\infty$	0
$\alpha = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = \pi$	0	-1	0	$-\infty$
$\alpha = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\infty$	0
$\alpha = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\alpha = 2\pi$	0	1	0	$\infty$

**Przykład 1.6** *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\sin x - \cos x = 0.$$

**Rozwiązanie.** W pierwszej kolejności zauważmy, że dziedziną  $D = R$  wyrażenia trygonometrycznego w równaniu jest zbiór  $R$  wszystkich liczb rzeczywistych.

Z tabelicy odczytujemy pierwiastki równania w przedziale  $0 \leq x \leq 2\pi$  okresu  $\omega = 2\pi$  funkcji sinus i cosinus

$$\sin x = \cos x.$$

Zatem widzimy, że sinus równy jest cosinus dla kątów  $x = \frac{\pi}{4}$  oraz  $x = \frac{5\pi}{4}$ , które leżą w pierwszej lub trzeciej ćwiartce koła trygonometrycznego.

Wszystkie rozwiązania dostajemy dodając okres  $\omega = 2\pi$  do tych rozwiązań

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Rozwiązanie tego równania znajdziemy innym sposobem rozkładając wyrażenie trygonometryczne na czynniki. Mianowicie, lewą stronę równania zapiszmy w postaci

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Stosując wzór na różnicę sinusów, otrzymamy iloczyn

$$\begin{aligned} \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 2 \sin \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - x}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + x}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0. \end{aligned}$$

Skąd pierwiastki główne w przedziale  $[0, 2\pi]$  okresu funkcji sinus

$$\frac{\pi}{4} - x = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{4} - x = \pi$$

Dodając okres  $\omega = 2\pi$  funkcji sinus, otrzymamy wszystkie rozwiązania

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{\pi}{4} + (2k - 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Przykład 1.7** *Znajdź wszystkie rozwiązania równania*

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2.$$

**Rozwiązanie.** Z tablicy wartości funkcji tangens i cotangens, widzimy, że suma tangensa i cotangensa kąta  $x$  jest równa 2, jeżeli  $\operatorname{tg}x = 1$  i  $\operatorname{ctg}x = 1$  dla  $x = \frac{\pi}{4}$  lub  $x = \frac{5\pi}{4}$ . Wszystkie rozwiązania otrzymamy dodając do głównych pierwiastków wielokrotność ich okresu.

To znaczy

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Te same rozwiązania otrzymamy innym sposobem. Mianowicie, napiszmy to równanie w postaci ekwiwalentnej

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

Zauważmy, że dziedziną wyrażenia trygonometrycznego w tym równaniu jest zbiór liczb rzeczywistych  $x \in R$  dla których  $\sin x \neq 0$  i  $\cos x \neq 0$

$$D = \left\{ x \in R : x \neq \frac{k\pi}{2}, \right\}$$

dla całkowitych liczb  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

Przekształcamy to równanie korzystając z jedynki trygonometrycznej i z sinusa podwojonego kąta

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = 2$$

Skąd wynika równanie

$$2 \sin x \cos x = 1, \quad \text{lub} \quad \sin 2x = 1.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych pamiętamy, że  $\sin 2x = 1$  dla pierwiastka  $x = \frac{\pi}{4}$  lub  $x = \frac{5\pi}{4}$  w kole trygonometrycznym. Dodając do pierwiastków głównych wielokrotność okresu  $\omega = \pi$  funkcji  $\sin 2x$  otrzymamy wszystkie rozwiązania tego równania.

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{lub} \quad x_k = \frac{5\pi}{4} + k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Zauważmy, że powyższe pierwiastki równania są takie same jak w pierwszym sposobie rozwiązania i należą do dziedziny równania.

**Przykład 1.8** *Rozwiąż równanie*

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0.$$

**Rozwiązanie.** Tej postaci równania rozwiązujemy przez podstawienie nowej niewiadomej  $t = \sin x$ , żeby otrzymać równanie kwadratowe

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Wyóznik tego r'ownania  $\Delta = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 1$ . Zatem rozwiązania

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Wracając do niewiadomej  $x$ , znajdujemy wszystkie rozwiązania

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

lub

$$\sin x = 1, \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

dla całkowitych  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

**Zadanie 1.21** *Rozwiąż równanie*

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Jednym ze skutecznych sposobów rozwiązywania równań trygonometrycznych jest rozkład na czynniki wyrażenia trygonometrycznego. Niżej podajemy przykład takiego sposobu.

**Przykład 1.9** *Rozwiąż równanie*

$$\cos x + 3 \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

**Rozwiązanie.** Zastosujmy wzór do nawiasu na suma cosinusów

$$\begin{aligned} (\cos x + \cos 5x) + \cos 3x &= 2 \cos \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2} + \cos 3x \\ &= 2 \cos 3x \cos(-2x) + \cos 3x \\ &= \cos 3x(2 \cos 2x + 1) = 0. \end{aligned}$$

Zatem, wyrażenie trygonometryczne rozłożyliśmy na dwa czynniki, które przyrównujemy do zera

$$\cos 3x = 0, \quad \text{i} \quad 2 \cos 2x + 1 = 0, \quad \cos x - \frac{1}{2}.$$

Rozwiązując powyższe proste równania, otrzymamy następujące serie rozwiązań: Gdy

$$\cos 3x = 0,$$

to rozwiązanie

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x_k &= \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ 3x &= \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, & x_k &= \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}k\pi, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{aligned}$$

oraz gdy  $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ , to rozwiązanie

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, & x_k &= \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ 3x &= \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, & x_k &= \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \end{aligned}$$

**Przykład 1.10** *Rozwiąż równanie*

$$\sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0.$$

**Rozwiązanie.** Oznaczmy przez  $t = \sin x$ . Wtedy dostajemy równanie kwadratowe dla niewiadomej  $t$

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

którego rozwiązanie jest  $t_1 = -3$  i  $t_2 = 1$ . Ponieważ  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , dlatego  $t = -3$  należy odrzucić. Pozostaje wartość  $t = 1$ . Dla tej wartości

$$\sin x = 1, \quad \text{gdy} \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

### 1.5.1 Zadania

**Zadanie 1.22** Rozwiąż równanie

$$(i) \sin \frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \cos \frac{\pi x}{2} = 0.$$

**Zadanie 1.23** Rozwiąż równanie

$$(i) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0, \quad (ii) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} = 0.$$

**Zadanie 1.24** Rozwiąż równanie

$$(i) \sin x + \cos x = 0, \quad (ii) \sin x = \cos x.$$

**Zadanie 1.25** Rozwiąż równanie

$$(i) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0 \quad (ii) \operatorname{tg} x = \sin x.$$

**Zadanie 1.26** Rozwiąż równanie

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0.$$

**Zadanie 1.27** Rozwiąż równanie

$$2 \sin^3 x - \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0.$$

**Zadanie 1.28** Rozwiąż równanie

$$\operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 1.$$

## 1.6 Nierówności trygonometryczne

Podobnie jak równania trygonometryczne, rozwiązujemy nierówności trygonometryczne korzystając z wzorów redukcyjnych, wzorów sumy i różnicy funkcji trygonometrycznych.

### 1.6.1 Nierówności podstawowe dla funkcji sinus

**Przykład 1.11** Rozwiąż nierówność w przedziale  $[0, 2\pi]$ .

$$(i) \sin x \leq \frac{1}{2}, \quad (ii) \sin x > \frac{1}{2}.$$

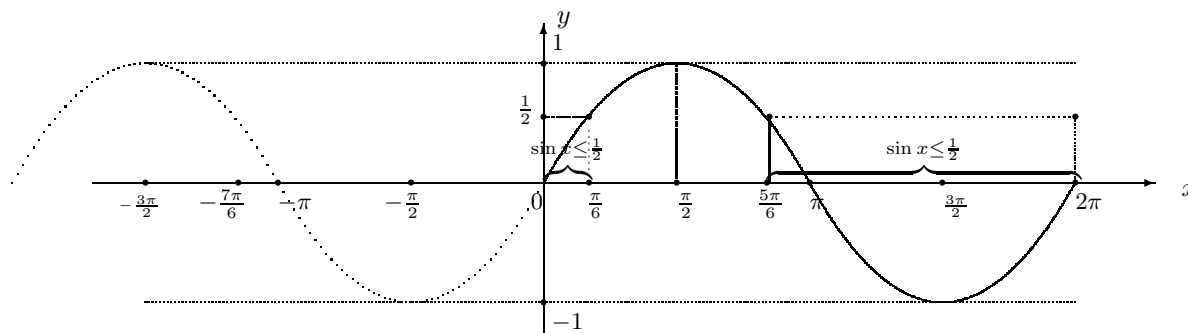
**Rozwiązanie (i).** Funkcja sinus osiąga wartość  $\sin x = \frac{1}{2}$  dla kąta  $x = \frac{\pi}{6}$  w pierwszej ćwiartce, lub dla kąta  $x = \frac{5\pi}{6}$  w drugiej ćwiartce. Zatem nierówność jest prawdziwa przedziale  $[0, 2\pi]$  dla

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

lub

$$\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi.$$

Zobaczmy to rozwiązanie na wykresie funkcji sinus.

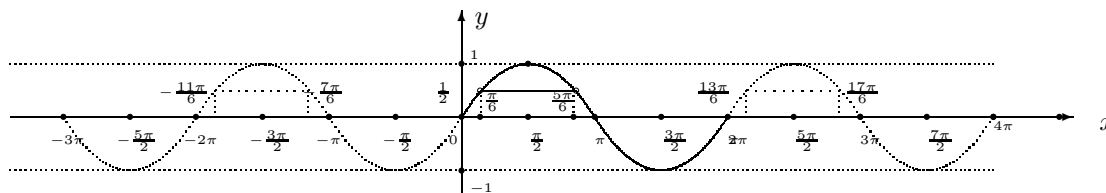


Zauważmy, że rozwiązaniem nierówności  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  na całej osi liczb rzeczywistych są te punkty  $x \in R$ , które należą do odcinków

$$x \in [a_k, b_k] = \left[ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right], \quad \text{gdzie } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

gdzie  $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ .

(ii) Podobnie znajdujemy rozwiązanie nierówności przeciwnej  $\sin x > \frac{1}{2}$



Rozwiązaniem nierówności  $\sin x > \frac{1}{2}$ , na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = \left[ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad (1.7)$$

o początku w punkcie  $a_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  i końcu w punkcie  $b_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ .<sup>7</sup>

## 1.6.2 Nierówności podstawowe dla funkcji cosinus

**Przykład 1.12** *Rozwiąż nierówność*

$$(i) \quad \cos x \leq \frac{1}{2},$$

$$(ii) \quad \cos x > \frac{1}{2}$$

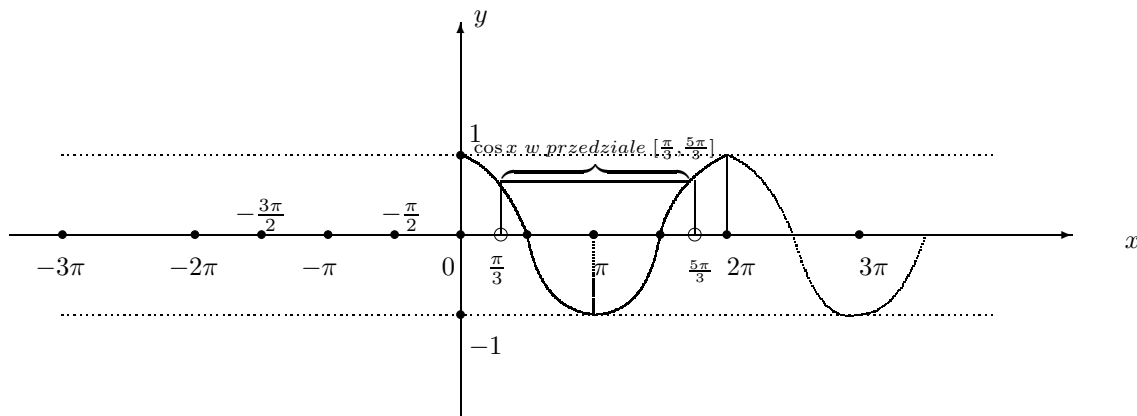
**Rozwiązanie (i).** Funkcja cosinus osiąga wartość  $\cos x = \frac{1}{2}$  dla kąta  $x = \frac{\pi}{3}$  w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego lub dla kąta  $x = \frac{5\pi}{3}$  w czwartej ćwiartce koła trygonometrycznego. Zatem nierówność

$$\cos x \leq \frac{1}{2}$$

<sup>7</sup>Tutaj indeks  $k \in C = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  przebiega cały zbiór liczb całkowitych.

jest prawdziwa w przedziale  $[0, 2\pi]$  dla wartości kąta  $x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ .

Zobaczmy to na wykresie funkcji  $y = \cos x$



Rozwiązaniem nierówności  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ , na całej osi liczb rzeczywistych, są odcinki

$$[a_k, b_k] = \left[ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad (1.8)$$

o początku w punkcie  $a_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  i końcu w punkcie  $b_k = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ .

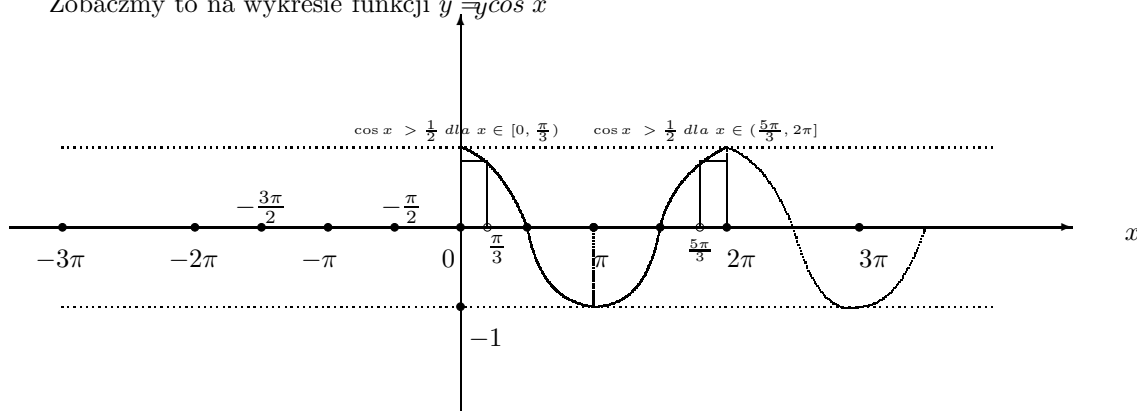
**Rozwiązanie (ii).** Funkcja cosinus osiąga wartość  $\cos x = \frac{1}{2}$  dla kąta  $x = \frac{\pi}{3}$  w pierwszej ćwiartce koła trygonometrycznego lub dla kąta  $x = \frac{5\pi}{3}$  w czwartej ćwiartce koła trygonometrycznego. Zatem nierówność

$$\cos x > \frac{1}{2}$$

jest prawdziwa w przedziale  $[0, 2\pi]$  dla wartości kąta

$$x \in \left[ 0, \frac{\pi}{3} \right) \cup \left( \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right]$$

Zobaczmy to na wykresie funkcji  $y = \cos x$



Rozwiązaniem nierówności  $\cos x > \frac{1}{2}$ , na całej osi liczb rzeczywistych, są przedziały

$$[a_k, b_k] = \left[ 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

o początku w punkcie  $a_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  i końcu w punkcie  $b_k = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ .  
lub przedziały

$$[c_k, d_k] = \left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

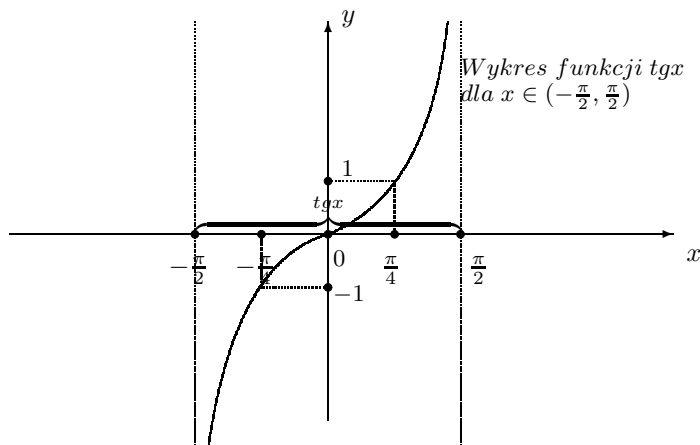
o początku w punkcie  $c_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  i końcu w punkcie  $d_k = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ .<sup>8</sup>

### 1.6.3 Nierówności podstawowe dla funkcji tangens i cotangens

**Funkcja Tangens.** Jak wiemy, funkcja tangens jest określona dla argumentu

$$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

różnego od nieparzystej wielokrotności kąta prostego  $\frac{\pi}{2}$ .



Funkcja tangens jest rosnąca. To znaczy dla większych wartości argumentu  $x$  wartości funkcji tangens są większe, piszemy

jeżeli  $x_1 < x_2$  to wartości  $tg x_1 < tg x_2$ . Funkcja tangens jest okresowa o okresie  $\omega = \pi$ , piszemy

$$tg x = tg(x + \pi) \quad \text{dla każdego } x \neq \frac{(2k + 1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Rozpatrzmy wykres funkcji tangens na całej osi liczbowej z wyjątkiem punktów

$$x_k \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{dla } k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

w których wartość funkcji tangens jest nieokreślona.

Przesuwając wykres funkcji

$$y = tg x \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

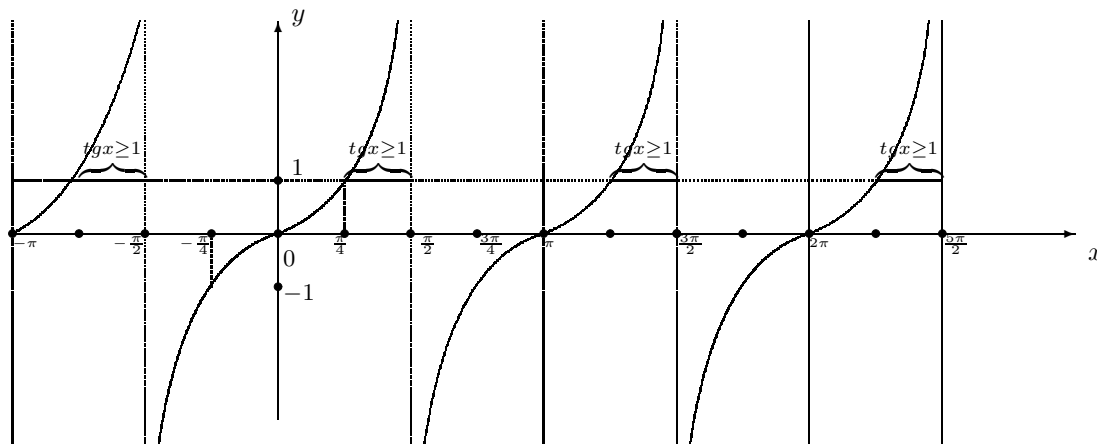
o okres  $\omega = \pi$  otrzymamy wykresy funkcji tangens w kolejnych przedziałach określoności

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \quad x \in \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \dots;$$

<sup>8</sup>Tutaj indeks  $k \in C = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  przebiega cały zbiór liczb całkowitych.



Niżej na wykresie zaznaczone są wartości argumentu  $x$  funkcji tangens dla których wartości  $tg x$  są większe lub równe jeden, to znaczy spełniona jest nierówność  $tg x \geq 1$ .



**Przykład 1.13 .**

(i) Znajdź rozwiązanie nierówności

$$tg x \geq 1$$

w przedziale otwartym  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

(ii) Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności

$$tg x \geq 1,$$

dla  $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ :

**Rozwiązanie**(i). Funkcja  $y = tg x$  jest rosnąca w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Wartość jeden funkcja tangens osiąga w punkcie  $x = \frac{\pi}{4}$ , toznaczy, że  $tg \frac{\pi}{4} = 1$ .

Zatem nierówność

$$tg x \geq 1$$

jest prawdziwa w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  dla  $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ .

**Rozwiązanie** (ii). Z wykresu funkcji  $y = tg x$  widzimy, że w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$tg x < 1 \quad \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}).$$

Wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności  $tg x < 1$  łatwo odczytamy z wykresu. Mi-anowicie wartość funkcji tangens jest mniejsza od jeden  $tg x < 1$  dla wszystkich rzeczywistych wartości argumentu należących do przedziałów

$$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi), \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

**Zadanie 1.29** Rozwiąż nierówność

(i)  $tg x \geq \sqrt{3}$ ,

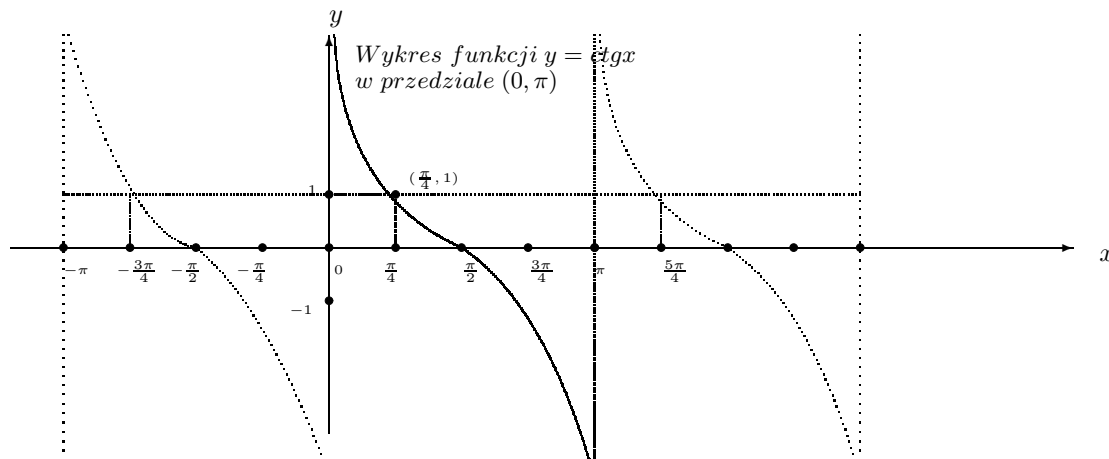
(ii)  $tg x < \sqrt{3}$

dla wszystkich rzeczywistych wartości  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

**Funkcja cotangens.** Jak wiemy, funkcja cotangens jest określona dla argumentu

$$x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

różnego od wielokrotności kąta półpełnego  $\pi$ .



Funkcja cotangens jest malejąca i okresowa o okresie  $\omega = \pi$ . To znaczy dla większych wartości argumentu  $x$  wartości funkcji cotangens są mniejsze, piszemy

jeżeli  $x_1 < x_2$  to wartości  $ctg x_1 > ctg x_2$

Funkcja cotangens jest okresowa o okresie  $\omega = \pi$ , piszemy

$$ctg x = ctg(x + \pi) \quad \text{dla każdego } x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

#### Przykład 1.14 .

(i) Znajdź rozwiązanie nierówności

$$ctg x \geq 1$$

w przedziale otwartym  $(0, \pi)$ .

(ii) Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności

$$ctg x \geq 1,$$

dla  $x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  :

**Rozwiązanie** (i). Funkcja  $y = ctg x$  jest malejąca w przedziale  $(0, \pi)$ . Wartość  $ctg x = 1$  osiąga dla  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Zatem

$$ctg x \geq 1 \quad \text{dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

**Rozwiązanie** (ii) Z wykresu funkcji okresowej cotangens o okresie  $\omega = \pi$  znajdujemy wszystkie przedziały

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

w których nierówność  $ctg x \geq 1$  jest prawdziwa.

#### Zadanie 1.30 .

(i) Znajdź rozwiązanie nierówności

$$ctg x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

w przedziale otwartym  $(0, \pi)$ .

(ii) Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności

$$\operatorname{ctg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dla  $x \in (0, \pi)$ .

**Zadanie 1.31 .**

(i) Znajdź rozwiązanie nierówności

$$\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$$

w przedziale otwartym  $(0, \pi)$ .

(ii) Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności

$$\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3},$$

dla  $x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots :$

**Zadanie 1.32 .**

(i) Znajdź rozwiązanie nierówności

$$\operatorname{ctg} x \geq \operatorname{tg} x$$

w przedziale otwartym  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

(ii) Znajdź wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności

$$\operatorname{tg} x \geq \operatorname{ctg} x,$$

dla  $x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots :$

**Zadanie 1.33 .**

Znajdź rozwiązanie nierówności

$$\operatorname{tg}^2 x - 1 \geq 0$$

w przedziale otwartym  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

## 1.7 Twierdzenie sinusów

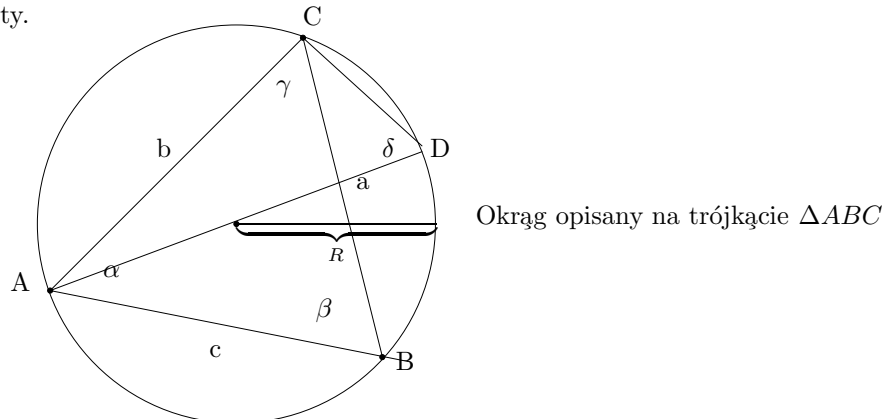
**Twierdzenie 1.1** W dowolnym trójkącie stosunek długości boków do sinusów kątów leżących na przeciw boków jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie. To znaczy

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (1.9)$$

Istnie kilka dowodów twierdzenia sinusów. Tutaj podamy dwa dowody związane relacją pomiędzy kątem wpisanym w okrąg i kątem środkowym, które są opartym na tym samym łuku.

**Dowód I.** Rozpatrujemy okrąg opisany na trójkącie  $\triangle ABC$  o promieniu  $R$ . Z wierzchołka  $A$  prowadzimy średnicę okręgu do przecięcia z okręgiem w punkcie  $D$ . Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg  $\angle ABC = \beta$  i  $\angle ADC = \delta$  są oparte na tym samym łuku  $\widehat{AC}$ . Zatem są

równe  $\beta = \delta$ . Trójkąt  $\triangle ADC$  jest prostokątny, gdyż kąt  $\angle DCA$  o wierzchołku  $C$  oparty na średnicy jest prosty.



Z tego prostokątnego trójkąta  $\triangle ADC$ , znajdujemy sinus kąta  $\delta$ . Mianowicie

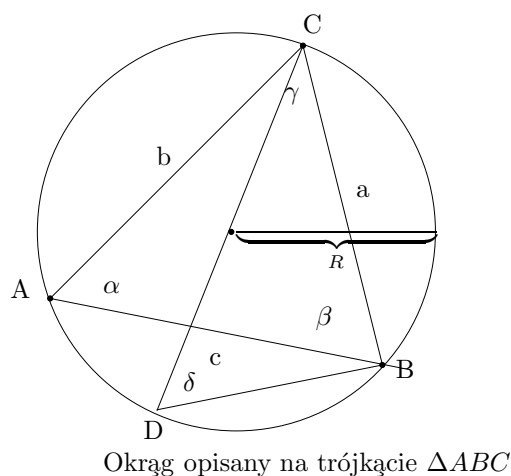
$$\sin \delta = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{b}{2R}, \quad \text{oraz} \quad \sin \beta = \frac{b}{2R} \quad \text{dla } \beta = \delta$$

Skąd obliczamy

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad (1.10)$$

Podobnie dowodzimy tezę dla kąta  $\alpha$  trójkąta  $\triangle ABC$ . Jedyne zmieniamy położenie średnicy, jak na rysunku

Dla kąta  $\alpha$  prowadzimy średnicę  $CD$  z wierzchołka  $C$  trójkąta  $\triangle ABC$  do przecięcia z okręgiem w punkcie  $D$ . Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg  $\angle CAD = \alpha$  i  $\angle ADB = \delta$  są oparte na tym samym łuku  $\widehat{BC}$ . Zatem są równe  $\alpha = \delta$ . Trójkąt  $\triangle BCD$  jest prostokątny, gdyż kąt  $\angle DBC$  o wierzchołku  $B$  oparty na średnicy jest prosty.



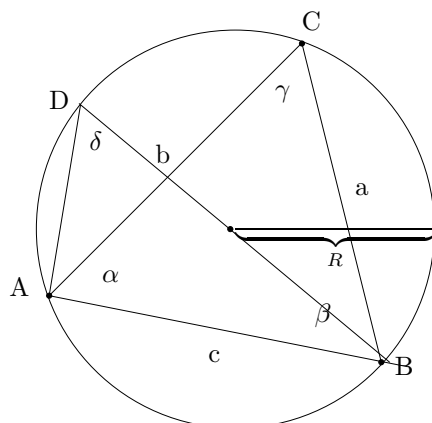
Z tego prostokątnego trójkąta  $\triangle BCD$ , znajdujemy sinus kąta  $\delta$ . Mianowicie

$$\sin \delta = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{a}{2R} \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R} \quad \text{dla } \alpha = \delta$$

Skąd obliczamy

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad (1.11)$$

Dla kąta  $\gamma$  prowadzimy średnicę  $BD$  z wierzchołka  $B$  trójkąta  $\Delta ABC$  do przecięcia z okręgiem w punkcie  $D$ , jak na rysunku



Okrąg opisany na trójkącie  $\Delta ABC$

Zauważmy, że kąty wpisane w okrąg  $\angle BCA = \gamma$  i  $\angle BDA = \delta$  są oparte na tym samym łuku  $\widehat{AB}$ . Zatem są równe  $\gamma = \delta$ . Trójkąt  $\Delta BDA$  jest prostokątny, gdyż kąt  $\angle DAB$  o wierzchołku  $A$  oparty na średnicy jest prosty. Z tego prostokątnego trójkąta  $\Delta BCD$ , znajdujemy sinus kąta  $\delta$ . Mianowicie

$$\sin \delta = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{c}{2R} \quad \text{oraz} \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R} \quad \text{dla } \gamma = \delta$$

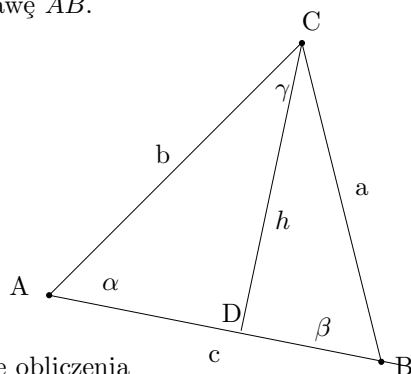
Skąd obliczamy

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (1.12)$$

Z równości (1.10, 1.11, 1.12) wynika teza twierdzenia (1.9)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (1.13)$$

**Dowód II.** Rozpatrzmy trójkąt  $\Delta ABC$ . Poprowadźmy wysokość  $h$  z wierzchołka  $C$  trójkąta  $\Delta ABC$  na podstawę  $AB$ .



$$h = a \sin \alpha$$

$$h = b \sin \beta$$

skąd otrzymamy

$$a \sin \alpha = b \sin \beta$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Wykonując proste obliczenia

$$h = b \sin \alpha$$

$$h = b \sin \beta$$

$$b \sin \alpha = a \sin \beta, \quad \text{dzielimy obie strony przez } \sin \alpha * \sin \beta$$

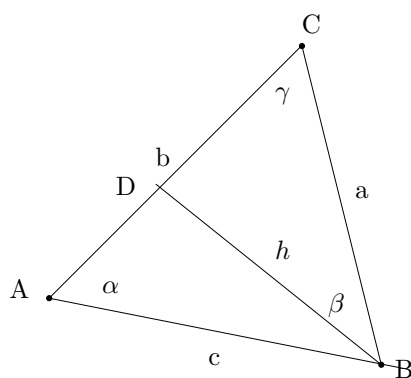
otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad (1.14)$$

W podobny sposób otrzymamy równość

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Mianowicie, W trójkącie  $\triangle ABC$  prowadzimy wysokość  $h$  z wierzchołka  $B$  na podstawę  $AC$



$$h = a \sin \gamma$$

$$h = c \sin \alpha$$

skąd otrzymamy

$$a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

Wykonując proste obliczenia

$$h = a \sin \gamma$$

$$h = c \sin \alpha$$

$$b \sin \alpha = a \sin \beta, \quad \text{dzielimy obie strony przez } \sin \alpha * \sin \gamma$$

otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (1.15)$$

Porównując równości (1.14) i (1.15) otrzymamy równość podwójną

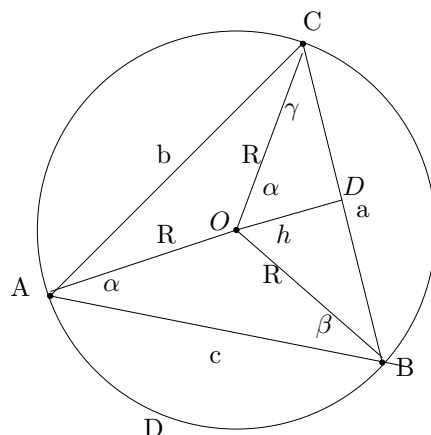
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (1.16)$$

Pozostaje udowodnić, że stosunek długości boków trójkąta  $\triangle ABC$  do sinusów odpowiednich kątów jest stały i równy  $2R$ , to znaczy

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Jeszcze raz rozpatrzmy trójkąt  $\triangle ABC$  i okrąg opisany na tym trójkącie o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $O$ . Ze środka tego trójkąta poprowadźmy promień do wierzchołków

$A, B, C$  oraz wysokość  $h = |OD|$  trójkąta  $\Delta BCO$ , jak na rysunku



Okrąg opisany na trójkącie  $\Delta ABC$

Zauważmy, że trójkąt  $\Delta BCO$  jest równoramienny o długości ramion równej promieniowi okręgu  $R$

$$|OB| = |OC| = R$$

Zatem punkt  $D$ , to jest koniec wysokości  $h = |OD|$ , dzieli bok  $BC$  na połowę

Z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym w okrąg opartych na tym samym łuku  $\widehat{BC}$  wynika że kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego,

$$\text{kat wpisany } \angle BAC = \alpha \quad \text{i} \quad \text{kat srodkowy } \angle BOC = 2\alpha$$

Wysokość  $h$  trójkąta równoramiennego  $\Delta BCO$  dzieli kąt środkowy  $\angle COB = 2\alpha$  na połowę. Zatem kąt  $\angle COB = \alpha$  w trójkącie prostokątnym  $\Delta DCO$  o przeciwprostokątnej  $CO$  i przyprostokątnych  $h = |OD|$  i  $|DC| = \frac{a}{2}$ .

Z trójkąta prostokątnego  $\Delta DCO$  znajdujemy

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

Skąd otrzymujemy równość

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \tag{1.17}$$

Z równości (1.16) i (1.17) wynika teza twierdzenia (1.9)

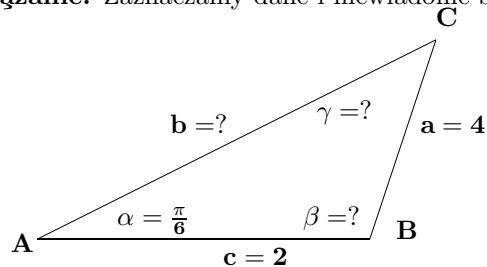
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenia sinusów stosujemy wprost do wyznaczania boków i kątów trójkąta, na podstawie następujących danych

1. dwóch boków i kąta naprzeciw jednego z nich,
2. boku i dwóch kątów przyległych do tego boku,

**Przykład 1.15** Oblicz boki i kąty trójkąta  $\Delta ABC$ , mając długości dwóch boków  $|AB| = c = 4$  i  $|BC| = a = 2$  kąt  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  leżący na przeciw boku  $[BC]$ .

**Rozwiązanie.** Zaznaczamy dane i niewiadome boki i kąty na rysunku



Trójkąt  $\triangle ABC$

Z twierdzenia sinusów obliczamy promień  $R$  okręgu opisanego na trójkącie

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \quad \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2R, \quad R = 2.$$

Następnie również z twierdzenia sinusów obliczamy sinus kąta  $\gamma$  leżącego naprzeciw boku  $|AB| = c = 2$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Skąd znajdujemy kąt  $\gamma = \frac{\pi}{6}$  i kąt  $\beta$  z sumy kątów w trójkącie

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

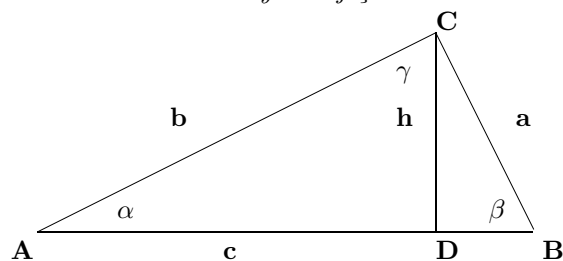
Pozostały bok  $|AC| = b$  obliczamy z twierdzenia sinusów

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R, \quad b = 2R \sin \beta = 2 * 2 * \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

## 1.8 Twierdzenie cosinusów

Podobnie jak twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów stosujemy do obliczanie boków i kątów dowolnych trójkątów.

**Twierdzenie 1.2** W dowolnym trójkącie  $\triangle ABC$



Trójkąt  $\triangle ABC$



o bokach i kątach zaznaczonych na rysunku zachodzą następujące związki pomiędzy bokami i kątami

$$(i) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2b c \cos \alpha$$

$$(ii) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2a c \cos \beta$$

$$(iii) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a b \cos \gamma$$

**Dowód.** Udowodnimy pierwszą z wymienionych wyżej równości. Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego, gdy  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  wzór (i) jest prawdziwy, gdyż wtedy  $\cos \alpha = 0$  i stosuje twierdzenie Pitagorasa. Dla  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Punkt **D**, spodek wysokości **h**, dzieli bok  $[AB]$  na dwie części  $|AD|$  i  $|DB|$ , gdzie <sup>9</sup>

$$|AD| = b \cos \alpha, \quad i \quad |DB| = a \cos \beta.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów  $\triangle ADC$  i  $\triangle DBC$ , obliczamy

$$h^2 = |AC|^2 - |AD|^2$$

oraz

$$h^2 = |BC|^2 - |BD|^2$$

Porównując prawe strony powyższych równości otrzymamy równość

$$|AC|^2 - |AD|^2 = |BC|^2 - |DB|^2 \quad (1.18)$$

Następnie podstawiając do równości (1.18)

$$\begin{aligned} a &= |BC|, & b &= |AC|, & c &= |AB|, \\ |AD| &= b \cos \alpha, & |DB| &= c - |AD|, & |DB| &= c - b \cos \alpha \end{aligned}$$

otrzymamy związek (i), w formie nieuproszczonej, pomiędzy bokami i kątami trójkąta  $\triangle ABC$

$$\underbrace{b^2 - (b \cos \alpha)^2}_{|AC|^2 - |AD|^2} = \underbrace{a^2 - (c - b \cos \alpha)^2}_{|BC|^2 - |DB|^2} \quad (1.19)$$

Uproszczając powyższe wyrażenia algebraiczne

$$b^2 - (b \cos \alpha)^2 = a^2 - (c^2 - 2b c \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$$

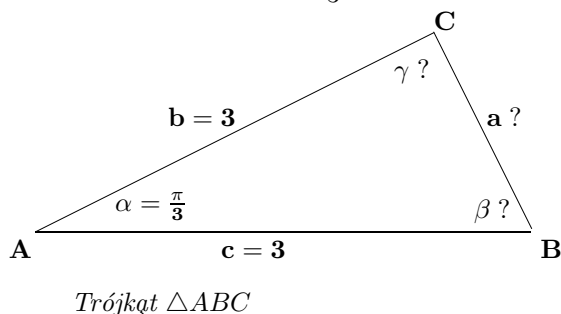
otrzymamy pierwszą tezę (i) twierdzenia cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b c \cos \alpha$$

Pozostałe wzory (ii) oraz (iii) dowodziemy podobnie. Mianowicie, żeby wyprowadzić wzór (ii) należy poprowadzić wysokość  $h$  z wierzchołka  $A$  na bok  $BC$ . Natomiast dla dowodu tezy (iii) należy poprowadzić wysokość  $h$  z wierzchołka  $B$  trójkąta  $\triangle ABC$  na bok  $AC$ .

<sup>9</sup>Przypominamy że  $|AD|$  oznacza długość odcinka  $[A, D]$

**Przykład 1.16** W trójkącie  $\triangle ABC$ , dana jest długości boku  $|AB| = 3$  i boku  $|AC| = 3$  oraz wartość kąta między nimi  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , jak na rysunku, oblicz długość bok  $a$  i kąty  $\beta$ ,  $\gamma$ .



**Rozwiązanie.** Z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 9 + 9 - 9 = 9. \end{aligned}$$

Skąd długość boku  $a = \sqrt{9} = 3$ .

Mając boki trójkąta,  $a, b, c$  obliczamy cosinus kątów  $\beta$  i  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 3^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{2}, \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 3^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jeżeli  $\cos \beta = \frac{1}{2}$  i  $\cos \gamma = \frac{1}{2}$  to kąt  $\beta = \frac{\pi}{3}$  i kąt  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ .

### 1.8.1 Zadania

**Zadanie 1.34** Oblicz boki i kąty trójkąta  $\triangle ABC$  mając długość dwóch boków

$$|AB| = 5, \quad |AC| = 5 \quad \text{i} \quad \text{kat } \angle ABC = 30^\circ$$

**Zadanie 1.35** Oblicz boki trójkąta  $\triangle ABC$  mając długość boku  $|BC| = 25$  i kąty

$$\angle CAB = 30^\circ, \quad \angle ABC = 60^\circ$$

**Zadanie 1.36** Oblicz kąty trójkąta  $\triangle ABC$  mając długości boków

$$|AB| = 15m, \quad |BC| = 30m, \quad |AC| = 45m$$

## 1.9 Funkcje cyklometryczne

Funkcje cyklometryczne inaczej funkcje kołowe  $\arcsin \alpha$ ,  $\arccos \alpha$ ,  $\arctan \alpha$  i  $\text{arctg } \alpha$  są funkcjami odwrotnymi do funkcji trygonometrycznych w przedziałach w których funkcje  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\text{tg } \alpha$ ,  $\text{ctg } \alpha$  są rosnące lub malejące.

Na przykład, funkcją odwrotną do funkcji  $\sin \alpha$  jest funkcja  $\arcsin \alpha$  określona w przedziale otwartym dla  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Funkcją odwrotną do funkcji  $\cos \alpha$  jest funkcja  $\arccos \alpha$  określona w przedziale otwartym dla  $\alpha \in (0, \pi)$  lub ogólnie dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2 * k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

Podobnie, funkcje odwrotne do funkcji  $tg \alpha$  i  $ctg \alpha$  są funkcje  $arctg \alpha$  i  $arcctg \alpha$  określone w przedziałach otwartych tangens dla

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

i cotangens dla

$$\alpha \in (k\pi, (k + 1)\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots;$$

### 1.9.1 Arcus sinus

Funkcja  $y = \sin x$  jest rosnąca w przedziale domkniętym  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział  $[-1, 1]$ . Zatem funkcja odwrotna

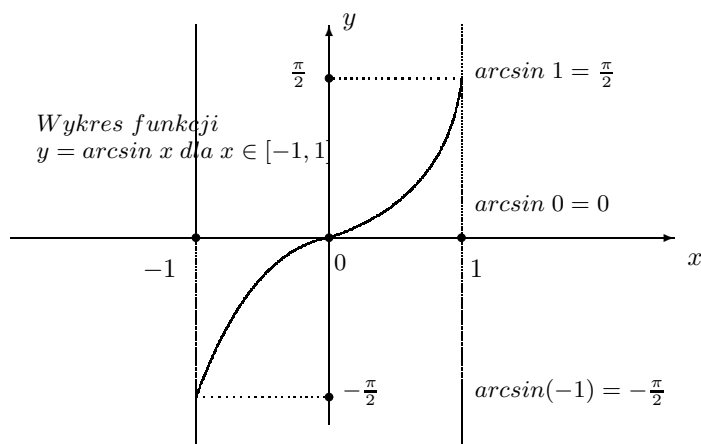
$$x = \arcsin y$$

do funkcji  $y = \sin x$  istnieje i jest określona w przedziale domkniętym  $[-1, 1]$ . To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej  $x = \arcsin y$  do funkcji  $y = \sin x$  jest zbiór wartości funkcji  $y = \sin x$ .

Zatem dla funkcji odwrotnej  $x = \arcsin y$  zmienną niezależną jest  $y \in [-1, 1]$ , a zmienną zależną jest  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Niżej na wykresie w funkcji arcus sinus zmieniamy role zmiennych  $x, y$  przyjmując

$$y = \arcsin x, \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{gd}y \quad x \in [-1, 1]$$



Wartości funkcji  $y = \arcsin x$  dla wybranych wartości argumentu  $x$  są podane w tablicy

$x^\circ$	<i>radian</i>	$y = \sin x$	$x = \arcsin y$
$-90^\circ$	$-\frac{\pi}{2}$	$-1$	$-\frac{\pi}{2}$
$-60^\circ$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
$-45^\circ$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-30^\circ$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
$0^\circ$	$0$	$0$	$0$
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$0$	$\frac{\pi}{4}$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	$1$	$\frac{\pi}{2}$

Zauważmy, że zachodzą następujące tożsamości

$$(i) \quad \arcsin(\sin x) \equiv x, \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad \sin(\arcsin x) \equiv x \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Rzeczywiście, niech

$$y = \sin x \quad \text{dla} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wtedy funkcja  $\sin x$  jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna  $x = \arcsin y$  istnieje i jest określona dla  $y \in [-1, 1]$ .

Podstawiając do lewej strony (i)  $y = \sin x$ , otrzymujemy tożsamość (i).

Podobnie, niech

$$y = \arcsin x \quad \text{dla} \quad x \in [-1, 1].$$

Wtedy funkcja  $\arcsin x$ , jest rosnąca i funkcja do niej odwrotna  $x = \sin y$  istnieje i jest określona dla  $y \in [-1, 1]$ .

Podstawiając  $y = \arcsin x$  do równości  $x = \sin y$ , otrzymujemy tożsamość (ii).

### 1.9.2 Arcus cosinus

Funkcja  $y = \cos x$  jest malejąca w przedziale  $[0, \pi]$ . Zbiorem wartości funkcji cosinus jest przedział  $[-1, 1]$ . Zatem funkcja odwrotna  $x = \arccos y$  do funkcji  $y = \cos x$  istnieje i jest określona w przedziale  $[-1, 1]$ . To znaczy dziedziną funkcji odwrotnej

$$x = \arccos y$$

do funkcji

$$y = \cos x$$

jest zbiór wartości funkcji  $y = \cos x$ . Natomiast zbiorem wartości funkcji  $x = \arccos y$  jest przedział  $[0, \pi]$ .

Niżej na wykresie w funkcji arcus cosinus zmieniamy role zmiennych  $x, y$  przyjmując

$$y = \arccos x, \quad y \in [0, \pi], \quad \text{gd}y \quad x \in [-1, 1]$$

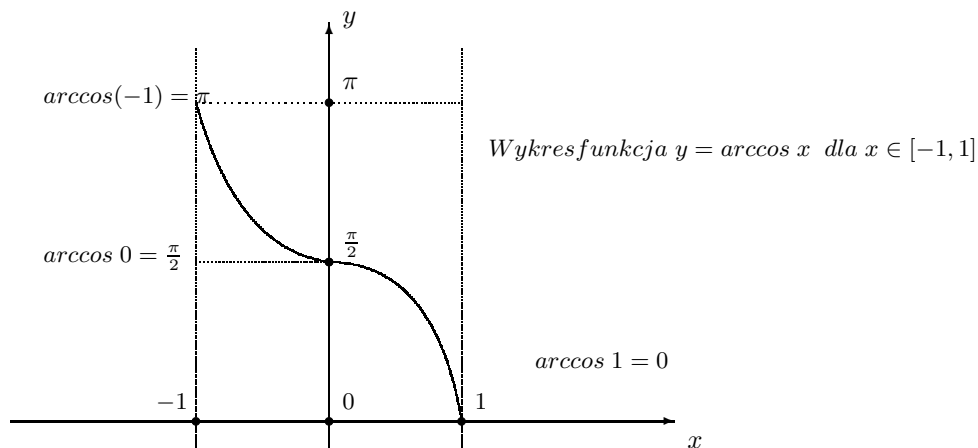


Tabela wartości funkcji  $y = \arccos x$   
dla wybranych wartości argumentu  $x$ .

$x^\circ$	radian	$y = \cos x$	$x = \arccos y$
0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
180°	$\pi$	-1	$\pi$

Zachodzi prosty związek pomiędzy arcus sinus i arcus cosinus

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (1.20)$$

Rzeczywiście, zauważamy, że prawdziwa jest nierówność

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi.$$

Z nierówności

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

i z równość

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \sin(\arcsin x)$$

wynika tożsamość (1.20).

### 1.9.3 Arcus tangens

Funkcja tangens  $y = \operatorname{tg} x$  jest okresowa o okresie  $\omega = \pi$  i określona dla argumentu różnego od nieparzystej wielokrotności kąta prostego  $\frac{\pi}{2}$ .

$$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Przedziałem wartości funkcji tangens jest zbiór liczb rzeczywistych  $R = (-\infty, \infty)$ .

Funkcja  $y = \operatorname{tg} x$  jest rosnąca od  $-\infty$  do  $\infty$  w przedziale otwartym

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dlatego istnieje funkcja odwrotna

$$x = \operatorname{arctg} y,$$

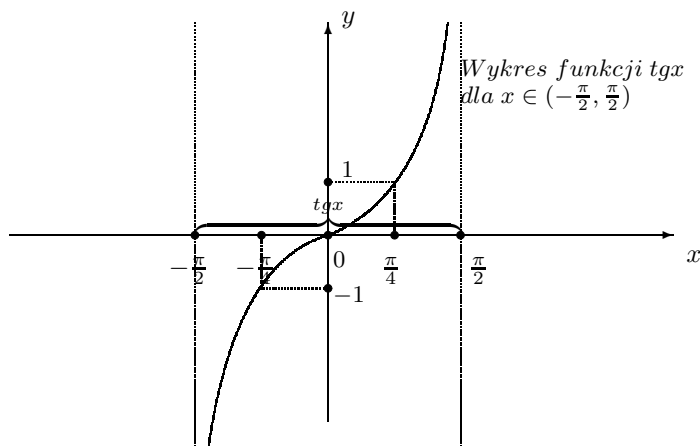
do funkcji  $y = \operatorname{tg} x$  w przedziale otwartym  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Bez zmiany własności funkcji arcus tangens możemy zamienić zmienne  $x, y$  miejscami, pisząc

$$y = \operatorname{arctan} x.$$

Wartości funkcji arcus tangens należą do przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , piszemy

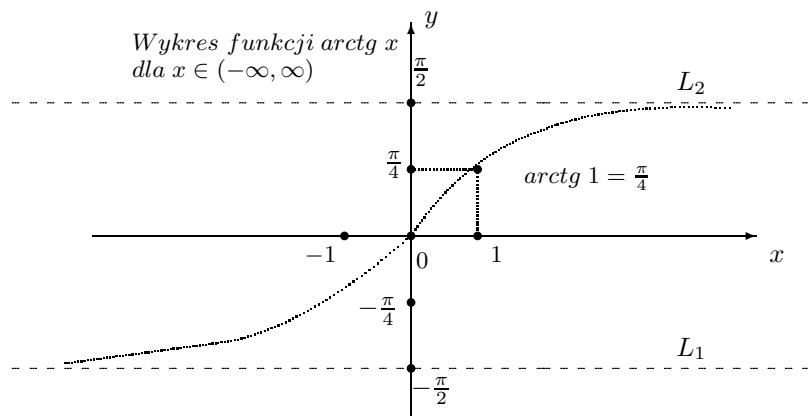
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Rozpatrzmy jeszcze raz wykres funkcji tangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus tangens odwrotnej do funkcji tangens otrzymamy przez obrót wykresu funkcji tangens w kierunku przeciwnym do ruch wskazówek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Na wykresie zaznaczony jest zakres wartości funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, \infty).$$



Funkcja  $\operatorname{arctg} x$  ma dwie asymptoty  $L_1$  i  $L_2$  równoległe do osi  $x$

#### 1.9.4 Arcus cotangens

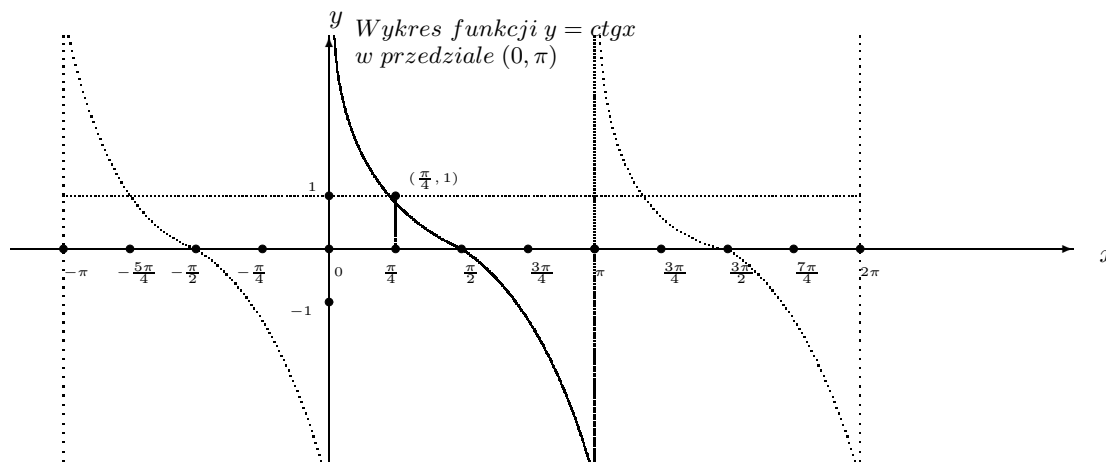
Funkcja  $y = \operatorname{ctg} x$  jest malejąca w przedziale otwartym  $(0, \pi)$  i jej zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste  $-\infty < y < \infty$ . Zatem funkcja odwrotna  $x = \operatorname{arcctg} y$  istnieje i jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych  $-\infty < y < \infty$ . Natomiast jej zbiór wartości zmienia się w zakresie od 0 do  $\pi$ , to znaczy

$$0 < \operatorname{arcctg} y < \pi, \quad -\infty < y < \infty.$$

Podobnie jak w przypadku funkcji arcus tangens, bez zmiany własności funkcji arcus cotangens, zamieniamy zmienne  $x, y$  miejscami, pisząc

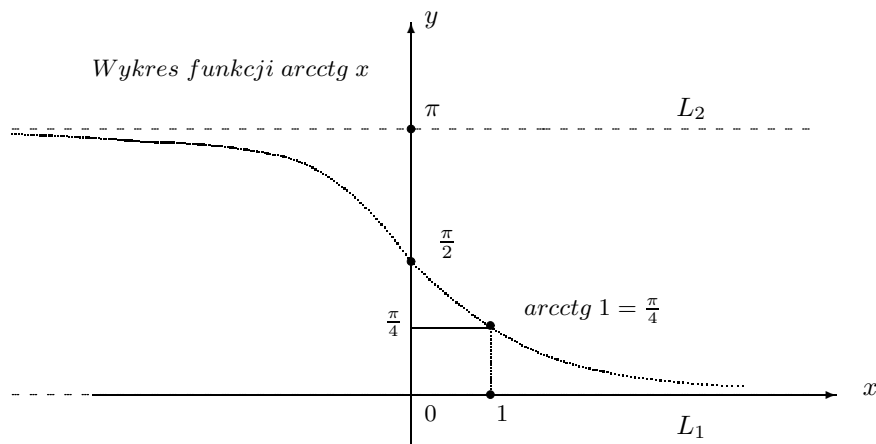
$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty$$

Rozpatrzymy jeszcze raz wykres funkcji cotangens. Zauważmy, że wykres funkcji arcus cotangens odwrotnej do funkcji cotangens otrzymamy przez obrót wykresu funkcji cotangens w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara patrząc na wykres z odwrotnej strony.



Z wykresu funkcji cotangens tworzymy wykres funkcji odwrotnej arcus cotangens

$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty$$



Funkcja  $\operatorname{arctg} x$  ma dwie asymptoty  $L_1$  to jest os  $x$  i  $L_2$  równoległa do osi  $x$

Zachodzi następujący związek pomiędzy arcus tangens i arcus cotangens, pisząc

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.21)$$

Rzeczywiście, zauważamy, że kąt

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \leq \pi,$$

gdyż kąt  $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2}$ . Zatem mamy tożsamość

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \operatorname{arctg} x$$

Skąd wynika tożsamość (1.21).

### 1.9.5 Zadania

**Zadanie 1.37** Oblicza wartość wyrażenia

$$\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Zadanie 1.38** Oblicza wartość wyrażenia

$$\arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arccsc} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Zadanie 1.39** Oblicza wartość wyrażenia

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$

**Zadanie 1.40** Podaj wykres funkcji

$$f(x) = \sin(\arcsin x)$$

dla argumentu  $x \in [-1, 1]$ .



**Zadanie 1.41** *Podaj wykres funkcji*

$$f(x) = \cos(\arcsin x)$$

*dla argumentu  $x \in [-1, 1]$ .*

**Zadanie 1.42** *Rozwiż równanie*

$$\arcsin x - \arccos x = 0$$

**Zadanie 1.43** *Rozwiż równanie*

$$2\arcsin x - \arccos x = \pi$$

**Zadanie 1.44** *Rozwiż równanie*

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x = 0$$

**Zadanie 1.45** *Rozwiż równanie*

$$3\operatorname{arctg} x - 2\operatorname{arcctg} x = \pi$$