SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT: 1.1

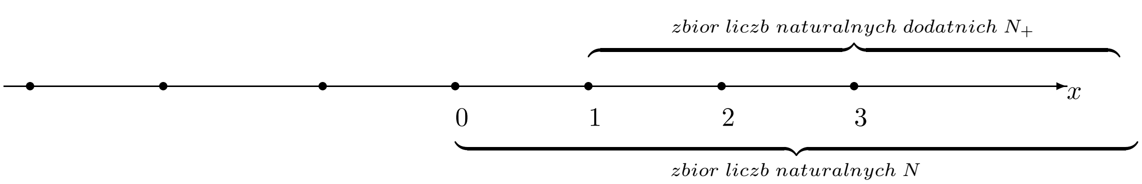
O liczbach naturalnych parzystych i nieparzystych

Zbiór liczb naturalnych

$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1}$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{2}$$



Oś liczbowa. Liczby naturalne

Tadeusz STYŠ Warszawa czerwiec 2023

Contents

Chapter 1

Liczby naturalne i całkowite

1.1 Wstęp

Koncepcja liczb naturalnych i proste operacje arytmetyczne były znane już od około 50 tysięcy lat temu. To wiemy na podstawie archeologicznych i historycznych odkryć.
Natomiast pierwszy systematyczny opis arytmetyki liczb naturalnych opracowany został przez starożytnych greków w szkole Jońskiej Talesa, (625-545 p.n.e.), w szkole Pitagorejskiej (569-475 p.n.e.), na uniwersytecie w Aleksandrii przez Euklidesa (330-267 p.n.e.) i przez Archmedesa z Syrakus (287-212 p.n.e.)
Teoria liczb jest w dalszym ciągu inspirującym przedmiotem licznych prac publikowanych w wiodących pisamach poświęconych teorii liczb. W ostatnich kilkudziesięciu latach obserwuje się szerokie zastosowania teorii liczb w projektowaniu systemów komputerowych w kryptografii i ochronie danych oraz w tworzeniu nowych algorytmów dla potrzeb administracji i programów społecznych.

1.2 Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych dodatnich oznaczmy symbolem

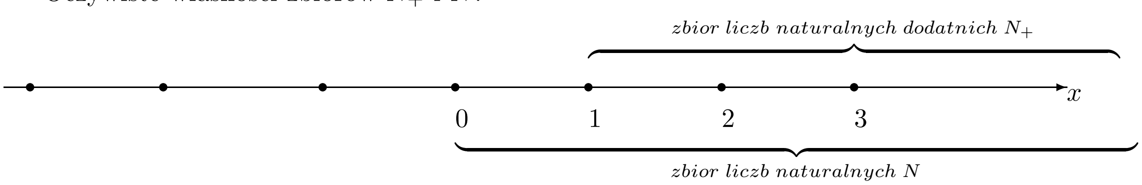
$$N_+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.1}$$

Umownie do zbioru liczb naturalnych zalicza się zero. Wtedy zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.2}$$

1.2.1 Własności liczb naturalnych

Oczywiste własności zbiorów N_+ i N.



Oś liczbowa. Liczby naturalne

Zbiór liczb naturalnych N_+ zawarty jest w zbiorze liczb naturalnych N, piszemy $N_+ \subset N$.

Suma liczb naturalnych $m + n$ też jest liczbą naturalną. Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich suma

$$m + n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje dodawania.
Na przykład dla liczb $m = 7,\ n = 5$, ich suma

$$m + n = 7 + 5 = 12 \in N$$

12 jest liczbą naturalną.
Operacja dodawania jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m, n suma

$$m + n = n + m$$

Na przykład $5 + 3 = 3 + 5 = 8 \in N$.
Podobnie zbiór liczb naturalnycj jest zamknięty na operacje mnożenia oraz operacja mnożenia jest przemienna
Mianowicie, iloczyn liczb naturalnych $m * n$ jest liczbą naturalną.
Zatem dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in N$ ich iloczyn

$$m * n \in N$$

należy do zbioru liczb naturalnych.
To znaczy że zbiór liczb naturalnych jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia.
Na przykład dla liczb naturalnych $m = 7,\ n = 5$ ich iloczyn

$$m * n = 7 * 5 = 35 \in N$$

jest liczbą naturalną. Operacja mnożenia jest przemienna dla dowolnych liczb naturalnych m, n iloczyn

$$m * n = n * m$$

Natomiast, wynik odejmowania liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną.
Na przykład, różnica liczb

$$3 - 5$$

nie jest liczbą naturalną, ale różnica $3 - 5 = -2$ jest liczbą całkowitą. Liczby całkowite omówimy w następnym paragrafie.

1.2.2 Suma kolejnych liczb naturalnych

Zapiszmy składniki sumy n kolejnych liczb naturalnych

$$s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_n & = & 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
S_n & = & n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
--- & ... & ------------------ \\
2 * S_n & = & \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.3}$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10 * 11}{2} = 55$$

1.2.3 Przykłady

Przykład 1.1 *Oblicz sumę kolejnych* 15 *liczb naturalnych*

$$S_{15} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15$$

używając tylko jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Rozwiązanie:
Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc}
S_{15} & = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 \\
S_{15} & = & 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
- - - & ... & - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
2 * S_{15} & = & \underbrace{16 + 16 + 16 + 11 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16}_{16\ skladnikow\ sumy}
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{15} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{15} = 15 * 16 : 2 = 120$$

1.3 Liczby parzyste

Zauważmy, że wszystkie liczby parzyste

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20, .., 30,\ 32,\ 34,\ ...40,\ 42\ 44,\ ..., 50,\ 52,\ ....;$$

mają cyfrę jedności

$$0\ \ lub\ \ 2\ \ lub\ \ 4\ \ lub\ \ 6\ \ lub\ \ 8$$

Natomiast wszystkie liczby nieparzyste

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19, .., 21,\ 23,\ 25,\ ...41,\ 43\ 45,\ ..., 51,\ 53,\ ....;$$

mają cyfry jedności

$$1\ \ lub\ \ 3\ \ lub\ \ 5\ \ lub\ \ 7\ \ lub\ \ 9$$

1.3.1 Suma kolejnych liczb parzystych

Wyprowadzenie ogólnego wzoru na sumę kolejnych liczb parzystych zazaczynamy od przykładu

Przykład 1.2 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb parzystych*

$$S_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$$

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 2+4++6+8+10+12+14+16+18+20 \\ S_{10} & = & 20+18+16+14+12+10+8+6+4+2 \\ --- & ... & -------------------- \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{22+22+22+22+22+22+22+22+22+22}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10*22:2 = 110 \quad \text{lub} \ \mathrm{S}_{10} = \frac{10*22}{2} = 110$$

1.3.2 Wzór ogólny na sumę kolejnych liczb parzystych

Napiszmy sumę n kolejnych liczb parzystch

$$S_n = 2+4+\cdots+(2n-2)+2n$$

Składniki sumy piszemy w odwrotnej kolejności i dodajemy stronami równości, jak niżej:

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & 2+ & 4+ & 6+ & \cdots+ & 2n-2+ & 2n \\ S_n & = & 2n+ & (2n-2)+ & (2n-4)+ & \cdots+ & 4+ & 2 \\ --- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\ 2*S_n & = & (2n+2)+ & (2n+2)+ & (2n+2)+ & \cdots+ & (2n+2)+ & (2n+2) \end{array}$$

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n\ skladnikow\ sumy}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$S_n = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Dla $n = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = \frac{10*22}{2} = 10*11 = 110$$

1.3.3 Przykłady

Przykład 1.3 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 84. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2,$$

Ich suma

$$(2n-2)+2n+(2n+2) = 6n = 84$$

Obliczamy n:

$$6n = 84, \qquad n = 84:6 = 14$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$\begin{array}{l} 2n-2 = 2*14-2 = 26, \\ 2n = 2*14 = 28, \\ 2n+2 = 2*14+2 = 30 \end{array}$$

Sprawdzenie: Obliczamy sumę trzech kolejnych liczb parzystych

$$26+28+30 = 84.$$

Zadanie 1.1 *Oblicz sumę 15-stu kolejnych liczb parzystych*

1.4 Liczby nieparzyste

Liczby nieparzyste

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\ ,\ 19,\ 21,\ 23,\ ..., (2n+1), ...;$$

mają cyfry jedności

$$1\quad lub\quad 3\quad 5\quad lub\quad 7\quad lub\quad 9$$

Zauważmy, że liczby nieparzyste są podzielne przez 2 z resztą 1. Każdą liczbaę n nieparzystą pieszemy w postaci ogólnej

$$n = 2k-1, \qquad dla \qquad k = 1,\ \ 2\ \ 3, , , , ;$$

1.4.1 Suma kolejnych liczb nieparzystych

Suma kolejnych k liczb nieparzystych

$$\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+...+(2k-1)}_{k\ skladnikow\ sumy}$$

ma k składników. Wartość ostatniego składnika tej sumy $n = 2k-1$.
Na przyład, suma $k = 10_{ciu}$ kolejnych liczb nieparzystych

$$S_{10} = \underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100}_{10\ skladnikow\ sumy}$$

ma 10 składników

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\ 17,\ 19$$

Ostatnni składnik 10_{ty} tej $n = 2*10-1 = 19$, gdy $k = 10$.

1.4.2 Ogólny wzór na sumę kolejnych liczb nieparzystych

Wyprowadzenie ogólnego wzoru na sumę kolejnych liczb nieparzystych zacznijmy od przykładu

Przykład 1.4 *Oblicz sumę 10-ciu kolejnych liczb nieparzystych*

$$S_{10} = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

Rozwiązanie: Zapiszmy składniki sumy w odwrotnej kolejności i dodajmy równości stronami, jak niżej:

$$\begin{array}{ccc} S_{10} & = & 1\ \ +3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ S_{10} & = & 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1 \\ ---& ... & ------------------- \\ 2*S_{10} & = & \underbrace{20+20+20+20+20+20+20+20+20+20}_{10\ skladnikow\ sumy} \end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_{10} używając jednego mnożenia i jednego dzielenia.

$$S_{10} = 10*20 : 2 = 100 \quad \text{lub} \quad \mathrm{S}_{19} = \frac{10*20}{2} = 100$$

Teraz powtórzmy powyże operacje dla k składników sumy liczb nieparzystych w której ostani składnik $n = 2k-1$. Zapiszmy składniki sumy

$$S_k = 1+3+\cdots+(2k-1)$$

w odwrotnej kolejności i dodajmy stronami równości, jak niżej

$$\begin{array}{ccccccc}
S_n & = & 1+ & 3+ & 5+ & \cdots + & (2n-3)+ & (2n-1) \\
S_n & = & (2n-1)+ & (2n-3)+ & (2n-5)+ & \cdots + & 3+ & 1 \\
--- & ... & --- & --- & --- & \cdots & --- & --- \\
2 * S_n & = & 2n+ & 2n+ & 2n+ & \cdots + & 2n+ & 2n
\end{array}$$

Skąd obliczmy sumę S_n.

$$2S_n = n * 2n, \qquad S_n = \frac{n * 2n}{2} = n * n = n^2$$

Dla $k = 10$ obliczamy S_{10}

$$S_{10} = 10 * 10 = 100$$

Przykład 1.5 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie: Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n + 1, \quad 2n + 3, \quad 2n + 5.$$

Ich suma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) = 6n + 9 = 51.$$

Obliczamy n:

$$6n + 9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42 : 6 = 7.$$

Obliczmy trzy kolejne liczby nieparzyste

$$\begin{array}{c}
2n + 1 = 2 * 7 + 1 = 15, \\
2n + 3 = 2 * 7 + 3 = 17, \\
2n + 5 = 2 * 7 + 5 = 19.
\end{array}$$

Sprawdzenie: Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych

$$15 + 17 + 19 = 51.$$