SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

LEKCJA 7.1,

System pozycyjny dziesiętny. Decymalny

10 godziny lekcyjne po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

Contents

Chapter 1

System liczbowy pozycyjny dziesiętny. Decymalny

1.1 Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych

Ogólna forma systemów pozycyjnych liczbowych ma postać wielomianu

$$\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \alpha_{n-2}\rho^{n-2} + \cdots + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0, \tag{1.1}$$

gdzie liczbę naturalną $\rho \geq 2$ nazywamy podstawą systemu liczbowego. Natomiast współczynniki $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_1, \alpha_0$ nazywamy cyframi systemu liczbowego.
Cyfry systemu liczbowego o podstawie ρ są to liczby jednocyfrowe:

$$0, 1, 2, 3, ..., \rho - 1$$

z których tworzone są liczby systemu. Ilość cyfr zależy od podstawy ρ i jest równa ρ.
Samą liczbę x piszemy umownie jako następujący ciąg cyfr

$$x = (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho$$

W przypadku systemu dziesiętnego, który jest powszechnie używany, nawias z indeksem ρ opuszczamy

$$(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0)_\rho.$$

Wtedy liczbę dziesiętną piszemy bez nawiasu

$$x = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\alpha_0$$

jako ciąg współczynników wielomianu (1.1).

1.2 Przykłady zapisu liczb w różnych systemach

Przykład 1.1 *W systemie dziesiętnym* $\rho = 10$. *Liczbę*

$$x = 2 * 10 + 4 = 24$$

piszemy bez nawiasu $x = 24$

Przykład 1.2 *W systemie binarnym* $\rho = 2$. *Tą samą liczbę*

$$x = 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (10000)_2$

Przykład 1.3 *W systemie oktalnym* $\rho = 8$. *Tą samą liczbę*

$$x = 3 * 8 + 0 = 24$$

piszemy z nawiasem $x = (30)_8$

1.3 System dziesiętny. Decymalny

W systemie dziesiętnym podstawa $\rho = 10$. Wtedy dla $\rho = 10$ wielomian jest wyrażeniem algebraicznym

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$$

współczynniki tego wyrażenia są cyframi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, gdzie
α_0 oznacza ilość jedności liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^0 = 10^0$.
α_1 oznacza ilość dziesiątek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^1 = 10$.
α_2 oznacza ilość setek liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^2 = 10^2$.
α_3 oznacza ilość tysięcy liczby x, współczynnik przy potędze $\rho^3 = 10^3$.
....
α_{n-1} oznacza współczynnik przy potędze $\rho^{n-1} = 10^{n-1}$.
Najbardziej znacząca cyfra jest zawsze większa lub równa 1, $\alpha_{n-1} \geq 1$.
Cyfry systemu dziesiętnego

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

są jednocześnie liczbami jednocyfrowymi
Liczby dwucyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_1 * 10 + a_0 = a_1a_0$$

gdzie cyfrą dziesiątek jest współczynnik a_1, cyfrą jedności jest współczynnik a_0

Przykład 1.4 *Liczba* $x = 57$

*5*10+7= 57*

Tutaj cyfra dziesiątek $a_1 = 5$, *cyfra jedności* $a_0 = 7$.

Liczby trzycyfrowe piszemy w ogólnej postaci

$$a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 = a_2a_1a_0$$

lub w zapisie potęgi podstawy 10, piszemy

$$100 = 10 * 10 = 10^2, \;\; 10^1 = 10, \;\; 10^0 = 1$$

wtedy liczba trzycyfrowa ma ogólną postać

$$a_2 * 10^2 + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 = a_2a_1a_0$$

Przykład 1.5 $x = 348$
$$3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 8 * 10^0 = 348$$

gdzie cyfra setek $a_2 = 3$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 4$, *cyfra jedności* $a_0 = 8$.

Ogólnie liczby n-cyfrowe w pozycyjnym systemie dziesiętnym piszemy jako współczynniki wyrażenia algebraicznego

$$a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3} + \cdots + a_1 10 + a_0 = a_{n-1}a_{n-2}...a_1 a_0$$

gdzie potęga podstawy 10

$$\begin{aligned}
10^1 &= \underbrace{10}_{1} \\
10^2 &= \underbrace{10 * 10}_{2} \\
10^3 &= \underbrace{10 * 10 * 10}_{3} \\
&.. \\
&.. \\
10^{n-3} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-3} \\
10^{n-2} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-2} \\
10^{n-1} &= \underbrace{10 * 10 * 10 * ... * 10}_{n-1}
\end{aligned}$$

oznacza liczbę 10 pomnożoną przez siebie 1 raz lub 2 razy lub 3 razy itd...$n-3$ razy $n-2$ razy i $n-1$ razy. Liczba 10 pomnożona przez siebie zero razy $10^0 = 1$.

Przykład 1.6 *Niech* $n = 4$, *wtedy liczbę czterocyfrowa x=7831.*
piszemy w postaci wyrażenia arytmetycznego

$$7 * 1000 + 8 * 100 + 3 * 10 + 1 = 7831$$

lub w symbolach potegi $1000 = 10 * 10 * 10 = 10^3$, $100 = 10 * 10 = 10^2$, $10 = 10^1$, $10^0 = 1$

$$7 * 10^3 + 8 * 10^2 + 3 * 10^1 + 1 = 7831$$

gdzie cyfra tysięcy $a_3 = 7$, *cyfra setek* $a_2 = 8$, *cyfra dziesiątek* $a_1 = 3$, *cyfra jedności* $a_0 = 1$.

1.3.1 Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym

Operacje arytmetyczne w systemie dziesiętnym wykonujemy w kolejności:
mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie.
Ten porządek wykonywania operacji arytmetycznych może być zmieniony przez nawiasy.

Przykład 1.7 *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego z nawiasami*
W wyrażeniach arytmetycznych z nawiasami w pierwszej kolejności obliczamy watość wyrażeń w nawiasach. W tym przykładzie w pierszej kolejności wykonujemy dodawanie i odejowanie w nawiasach, a następnie mnożenie i dzielenie

$$\begin{aligned}
\underbrace{(12 + 13)}_{25} * 4 - \underbrace{(15 - 6)}_{9} : 3 &= 25 * 4 - 9 : 3 \\
&= 100 - 3 = 97
\end{aligned}$$

1.3.2 Dodawanie pisemne liczb naturalnych

Tabliczka dodawania liczb systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Dodawanie				dziesiętne					
+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Dodawanie dziesiętne pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.8 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 25 *i* 13

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ + & 13 \\ & -- \\ & 38 \end{array}$$

Przykład 1.9 *Wykonaj dodawanie liczb dziesiętnych* 89 *i* 56

Wykonujemy pisemne dodawanie $25 + 13$, stosując tabliczkę dziesiętnego dodawania.

$$\begin{array}{rr} & 89 \\ + & 56 \\ & -- \\ & 145 \end{array}$$

1.3.3 Odejmowanie pisemne liczb całkowitych

Tabliczka odejmowania w systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Odejmowanie				dziesiętne					
-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Odejmowanie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.10 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 29 *i* 18

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $29 - 18$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$
\begin{array}{cr}
 & 29 \\
- & 18 \\
 & -- \\
 & 11
\end{array}
$$

Przykład 1.11 *Wykonaj odejmowanie liczb dziesiętnych* 629 *i* 354

Wykonujemy pisemne oktalne odejmowanie $629 - 354$, stosując tabliczkę odejmowania.

$$
\begin{array}{cr}
 & 629 \\
- & 354 \\
 & -- \\
 & 275
\end{array}
$$

1.3.4 Mnożenie pisemne liczb naturalnych

Tabliczka mnożenia w systemie pozycyjnym dziesiętnym

	Mnożenie				dziesiętne					
*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Mnożenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.12 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 49 *i* 15

Wykonujemy pisemne binarne mnożenie $49 * 15$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$
\begin{array}{r}
49 \\
*\,15 \\
--- \\
245 \\
49 \\
--- \\
735
\end{array}
$$

Przykład 1.13 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *i* 123

Wykonujemy pisemne mnożenie $345 * 123$, stosując tabliczkę mnożenia i dodawania.

$$\begin{array}{l} \ \ 345 \\ * \, 123 \\ - - - \\ \ 1035 \\ \ 690 \\ 345 \\ - - - \\ 42435 \end{array}$$

1.3.5 Dzielenie pisemne liczb naturalnych

Dzielenie pisemne wyjaśniamy na przykładach

Przykład 1.14 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 345 *podziel przez* 5

Wykonujemy pisemne dzielenie 345 : 5.

$$\begin{array}{l} \quad 69 \\ - - - \\ \ \ 345 : 5 \\ -30 \\ \ -- \\ \quad 45 \\ \quad 45 \\ \ - - - \\ \quad = \end{array}$$

Przykład 1.15 *Wykonaj pisemne dzielenie liczb dziesiętnych* 1659 *przez* 21

Wykonujemy pisemne dzielenie 1659 : 21.

$$\begin{array}{l} \quad 79 \\ - - - \\ \ \ 1659 : 21 \\ -147 \\ \ -- \\ \quad 189 \\ \quad 189 \\ - - -- \\ \quad = \end{array}$$

1.4 Własności liczb parzystych i nieparzystych dziesiętnych

1.4.1 Liczby parzyste dziesiętne.

Własności liczb parzystych:

1. Liczby parzyste mają cyfry jedności 0 lub 2 lub 4 lub 6 lub 8.
   Na przkład liczby
   $$120, \ 132, \ 134, \ 156, \ 178$$
   mają odpowiednio cyfry jedności
   $$0, \ 2, \ 4, \ 6, \ 8$$

2. Liczby parzyste są podzielne przez 2, zatem mają ogólną postać

$$n = 2 * k, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{ll} k = 0, & n = 2 * 0 = 0, \\ k = 1, & n = 2 * 1 = 2, \\ k = 2, & n = 2 * 2 = 4, \\ .... & ..... \\ k = 8, & n = 2 * 8 = 16, \\ k = 26, & n = 2 * 26 = 52. \end{array}$$

3. Suma, różnica i iloczyn liczb parzystych jest liczbą parzystą
Na przykład:

$$a = 8, \quad b = 6,$$

$$a + b = 8 + 6 = 14, \quad a - b = 8 - 6 = 2, \quad a * b = 8 * 6 = 48$$

1.4.2 Liczby nieparzyste dziesiętne

Własności liczb nieparzystych:

1. Liczby nieparzyste mają cyfry jedności 1 lub 3 lub 5 lub 7 lub 9.
Na przkład liczby

$$121, \ 133, \ 135, \ 157, \ 179$$

mają odpowiednio cyfry jedności

$$1, \ 3, \ 5, \ 7, \ 9$$

2. Liczby nieparzyste mają ogólną postać

$$n = 2 * k + 1, \quad \text{lub } n = 2 * k - 1, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

Na przykład

$$\begin{array}{llll} k = 0, & n = 2 * 0 + 1 = 1, & lub & n = 2 * 0 - 1 = -1 \\ k = 1, & n = 2 * 1 + 1 = 3, & lub & n = 2 * 1 - 1 = 1 \\ k = 2, & n = 2 * 2 + 1 = 5, & lub & n = 2 * 2 - 1 = 3 \\ .... & ..... & & \\ k = 8, & n = 2 * 8 + 1 = 17, & lub & n = 2 * 8 - 1 = 15 \\ k = 26, & n = 2 * 26 + 1 = 53 & lub & n = 2 * 26 - 1 = 51 \\ . & & & \end{array}$$

3. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
Na przykład:

$$5 * 7 = 35, \quad 7 * 11 = 77, \quad 9 * 15 = 105$$

4. Suma lub różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Podaj przykład.

5. Natomiast suma lub różnica liczby nieparzystej i liczby parzystej jest liczbą nieparzysta. Podaj przykład.

1.4.3 Przykłady

Zadanie 1.1 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby nieparzyste to

$$2n+1, \quad 2n+3, \quad 2n+5.$$

Ich suma

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 6n+9 = 51$$

Obliczamy n:

$$6n+9 = 51, \quad 6n = 42, \quad n = 42:6 = 7$$

Obliczmy trzy kolejne liczby parzyste

$$2n+1 = 2*7+1 = 15, \quad 2n+3 = 2*7+3 = 17, \quad 2n+5 = 2*7+5 = 19.$$

Sprawdzenie:

$$15+17+19 = 51$$

Zadanie 1.2 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 200. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne liczby parzyste to

$$2n-4, \quad 2n-2, \quad 2n, \quad 2n+2, \quad 2n+4.$$

Ich suma

$$(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2+(2n+4) = 10n = 200$$

Obliczamy n:

$$10n = 200, \quad n = 200:10 = 20$$

Obliczmy pięć kolejnych liczb parzystych

$$2n-4 = 2*20-4 = 36, \quad 2n-2 = 2*20-2 = 38, \quad 2n = 2*20 = 40,$$
$$2n+2 = 2*20+2 = 42, \quad 2n+4 = 2*20+4 = 44.$$

Sprawdzenie:

$$36+38+40+42+44 = 200.$$

Zadanie 1.3 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 160. Znajdź te liczby.*

Rozwiązanie:
Kolejne cztery liczby nieparzyste to

$$2n-3, \quad 2n-1, \quad 2n+1 \quad 2n+3.$$

Ich suma

$$(2n-3)+(2n-3)+(2n+1)+(2n+3) = 8n = 160$$

Obliczamy n:

$$8n = 160, \quad \text{to} \quad n = 160:8 = 20$$

Obliczmy cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2n-3=2*20-3=37, \quad 2n-1=2*20-1=39,$$

$$2n+1=2*20+1=41, \quad 2n+3=2*20+3=43.$$

Sprawdzenie:

$$37+39+41+43=160$$

1.4.4 Zadania

Zadanie 1.4 *Wykonaj dodawanie pisemne liczb dziesiętnych* 1659 *i* 421

Zadanie 1.5 *Wykonaj odejmowanie pisemne liczb* $1659-421$

Zadanie 1.6 *Wykonaj mnożenie pisemne liczb dziesiętnych* $345*21$

Zadanie 1.7 *Wykonaj dzielenie pisemne liczb dziesiętnych* 1722 *przez* 21

Zadanie 1.8 *Dopisz do liczby czterocyfrowej* 3058 *cyfrę* 7 *na pozycji pomiędzy jej cyfry albo na początku albo na końcu, żeby otrzymać najmniejszą liczbę pięciocyfrową.*

Zadanie 1.9 *Ile róznych liczb dwucyfrowych parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5*

Zadanie 1.10 *Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 51. znajdź te liczby.*

Zadanie 1.11 *Udowodnij, ze wyrażenie algebraiczne*

$$a^2+(a+2)(a+2)+(a+4)(a+4)+1$$

jest podzielne przez 12 dla każdej liczby naturalnej i nieparzystej a.

Zadanie 1.12 *Pomiędzy cyfry liczby 18519 wstaw cyfre 2, żeby otrzymać*

(a) liczbę największą

(b) liczbę najmiejszą

Zadanie 1.13 *Suma trzech kolejnych liczb parzystych równa jest 36. znajdź te liczby.*

Zadanie 1.14 *Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych równa jest 180. znajdź te liczby.*

Zadanie 1.15 *Suma pięciu kolejnych liczb parzystych równa jest 180. znajdź te liczby.*

Zadanie 1.16 *Oblicz sumę*

$$S_{15}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15$$

używając jednej operacji mnożenia i jednej operacji dzielenia.

Zadanie 1.17 *Oblicz sumę*

$$S_{16}=2+4+6+8+10+12+14+16$$

używając jednei operacji mnożenia.

Zadanie 1.18 *Oblicz sumę*

$$S_{21} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$$

używając jednej opercji mnożenia.

Zadanie 1.19 .

(a) *Oblicz sumę 20-stu wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.$$

(b) *Podaj wzór ogólny na sumę n-wyrazów ciągu*

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots, 3n.$$

(c) *Stosując ten wzór oblicz sumę 15-stu wyrazów tego ciągu.*

Zadanie 1.20 *Udowodnij, że wyrażenie algebraiczne*

$$(a + 1)(a + 1) + 3$$

jest podzielne przez 4 *dla każdej liczby parzystej* a.