SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

# TEMAT: 5.1

## Reprezentacja liczb w komputerze

*Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby* $x$

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

*Błąd względny zaokrąglenia liczby* $x \neq 0$

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

*Błąd procentowy zaokrąglenia liczby* $x \neq 0$

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

Tadeusz STYŠ

Warszawa czerwiec 2023

# Chapter 1

# Reprezentacja liczb w arytmetyce komputerowej

*Błąd bezwzględny zaokrąglenia liczby $x$*

$$\epsilon_x = x - fl(x)$$

*Błąd względny zaokrąglenia liczby $x \neq 0$*

$$\delta_x = \frac{x - fl(x)}{x}$$

*Błąd procentowy zaokrąglenia liczby $x \neq 0$*

$$\delta_x^{\%} = \frac{x - fl(x)}{x} * 100\%$$

Liczby w zapisie dziesiętnym zokrąglamy na r-tym miejscu po przecinku w ten sposób, że do cyfry na r-tym miejscu dodajemy 1, jeżeli następna cyfra jest większa lub równa 5. W przeciwnym razie cyfry po r-ym miejscu kasujemy. Operacje zaokrąglania liczby $x$ na r-tym miejscu oznaczamy symbolem $fl_r(x)$.

**Przykład 1.1** *Zaokrąglamy liczbę $\frac{22}{7}$ na 5-tym miejscu po przecinku.*
*Ułamek zwykły $\frac{27}{7}$ zamieniamy na ułamek dziesiętny dzieląc licznik $22$ przez mianownik $7$.*

$$\frac{22}{7} = 22 : 7 = 3.142857142857...;$$

*W wyniku dzielenia otrzymaliśmy liczbę $3.142857142857...;$ o nieskończonej ilości cyfr po przecinku. Na piątym miejscu po przecinku tej liczby jest cyfra $r = 5$, a następna cyfra $7$. Zatem zaokrąglamy liczbę $3.142857142857...;$ dodając $1$ do cyfry $5$.*

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857...; \quad fl_5(3.142857142857...) = 3.14286, \quad r = 5.$$

## 1.1 Zapis liczb w zmiennym przecinku

W obliczeniach z użyciem systemów obliczeniowych i komputerów liczby zapisywane są w postaci zmiennego przecinka

$$x = \mp m 10^c, \quad m - \text{ mantysa}, \quad c - \text{ cecha},$$

gdzie mantysa $m = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ ; $\alpha_1 \neq 0$ ; $0 \leq \alpha_i \leq 9$ ; $i = 1, 2, \ldots, r$ Najbardziej znacząca cyfra $\alpha_1 \neq 0$ jest zawsze różna od zera.
Dlatego mantysa $m$ spełnia następującą nierówność

$$0.1 \leq m < 1.$$

Jasne, że liczba $x$ może mieć dokładną zmienno przecinkową reprezentacje w komputerze, jeżeli jej mantysa ma skończoną liczbę cyfr.

Na przykład $\frac{1}{4}$ ma dokładną reprezentacje gdyż jej mantysa $m = 0.25$ i cecha $c = 0$.
Natomiast, mantysa liczby

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

ma nieskończenie wiele cyfr $m = 0.333...$, i nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej.
Każdą liczbę, nawet z mantysą o nieskończonej ilości cyfr, można zapisać w komputerze z dokładnością błędu zaokrąglenia mantysy na r-tym miejscu po przecinku.

$$\epsilon \leq 0.\underbrace{000...0}_{r-zer}5 = 0.5\ 10^{-r}.$$

Na przykład

$$x = \frac{2}{3} = 0.66666666666...$$

zaokrąglone na 4-tym miejscu po przecinku $(r = 4)$

$$fl(x) = 0.6667$$

ma błąd zaokrągleń $\epsilon = 0.0000333...$

**Zadanie 1.1** *Zaokrąglij następujące liczby na 3-cim miejscu po przecinku i zapisz je w zmiennym przecinku*

$$2\frac{3}{4},\ \frac{29}{7},\ -\frac{238}{13}.$$

## 1.2 Błąd bezwzględny zaokrąglenia.

Błądem bezwzgędnym zaokrąglenia liczby $x$ zapisanej w zmiennym przecinku

$$x = \mp m 10^c$$

nazywamy różnicę

$$\epsilon_x = fl_r(x) - x$$

Ten błąd spełnia nierówność

$$\mid fl_r(x) - x \mid \leq \epsilon * 10^c,$$

gdzie $\epsilon = 0.5\ 10^{-r}$.
Niech

$$x = 0.57367864 * 10^2, \quad r = 3.$$

Wtedy błąd bezwględny liczby $x$ na trzecim miejscu po przecinkuzlędny zaokąglenia wynosi

$$\mid fl_3(0.57367864 * 10^2) - 0.57367864 * 10^2 \mid =$$

$$\mid 0.574 * 10^2 - 0.57367864 * 10^2 \mid = 0.032136 < \frac{1}{2}\ 10^{-3} * 10^2 = 0.05.$$

## 1.3 Błąd względny zaokrąglenia.

Błąd względny zaokrąglenia danej liczby $x = \mp m\ 10^c \neq 0$ określamy jak następuje:

$$\delta_x = \frac{\epsilon_x}{x} = \frac{fl_r(x) - x}{x}, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Ponieważ mantysa $m \geq 0.1$, dlatego błąd względny spełnia nierówność

$$\mid \frac{\mid fl_r(x) - x}{x} \mid \leq 0.5 * 10^{1-r}, \quad x \neq 0.$$

Rzeczywiście,

$$\mid \frac{fl_r(x) - x}{x} \mid = \mid \frac{fl_r(\mp m 10^c) \pm m 10^c}{\mp m 10^c} \mid \leq \mid \frac{0.5 *\ 10^{-r}}{\mp m} \mid \leq 10\epsilon = 0.5 * 10^{1-r}.$$

Tak więc błąd względny nie przewyższa komputerowej precyzji $\delta = \frac{1}{2} 10^{1-r}$.

Na przykład, jeżeli $r = 3$ wtedy komputerowa precyzja $\delta = \frac{1}{2} 10^{-2}$

Obliczamy względny błąd zaokrąglenia liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$|\frac{fl(x) - x}{x}| = \frac{0.032136}{0.57367864 * 10^2} = 0.0005601742.$$

Błąd względny bezpośrednio związany jest z błędem procentowym.
Mianowicie, błąd procentowy wyraża się wzorem

$$p\% = 100 * \delta_x\% = 100 \frac{fl(x) - x}{x}\%, \quad \text{gdy } \ x \neq 0.$$

Obliczamy błąd procentowy liczby $x = 0.57367864 * 10^2$

$$p\% = 100 *\ 0.5601742 * 10^{-3}\% = 0.5601742 * 10^{-1}\% = 0.05601742\%.$$

Wyniki obliczeń w komputerze czterech operacji arytmetycznych $x \pm y,\ xy$ i dzielenia $x/y$ na ogół są niedokładne, nawet jeżeli $x$ i $y$ są dane w postaci dokładnej.
Na przykład, niech $x = 0.11111111$ i $y = 0.55555555$ będą 8-cyfrowymi liczbami w 8-mio cyfrowej arytmetyce w komputerze, (8-cyfr mantysa).
Zauważamy, że wynik mnożenia $xy = 0.617283938271605 * 10^{-1}$ ma 15-sto cyfrową mantysę $m = 0.617283938271605$, która automatycznie jest zaokrąglona w komputerze do 8 cyfrowej mantysy 0.61728394 z błędem bezwzględnym $\epsilon_x = 0.000000018271605$.

**Przykład 1.2** *Oblicz wartość wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zmienno - przecinkowym*

$$\frac{2\frac{1}{3} * 3\frac{1}{7} + 45.27}{4\frac{2}{9}}$$

*Podaj: błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy obliczeń.*

**Rozwiązanie.** Najpierw, napiszemy liczby $x = 2\frac{1}{3},\ y = 3\frac{1}{7},\ z = 45.27,\ t = 4\frac{2}{9}$ w postaci zmiennego przecinka, potem zaokrąglimy do miejsca $r = 3$ i podamy błąd zaokrąglenia każdej z danych liczb

$$x = 2\tfrac{1}{3} = 2.33333...; \qquad fl_3(x) = 0.233 * 10, \quad \epsilon_x = 0.003333....;$$

$$y = 3\tfrac{1}{7} = 3.142857142857...; \qquad fl_3(y) = 0.314 * 10, \quad \epsilon_y = 0.0042857....;$$

$$z = 45.27 \qquad fl_3(z) = 0.453 * 10^2, \quad \epsilon_z = 0.07$$

$$t = 4\tfrac{2}{9} = 4.222222...; \qquad fl_3(t) = 0.422 * 10, \quad \epsilon_t = 0.00222....;$$

Dalej, stosując reguły kolejności wykonywania operacji arytmetycznych, mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie, obliczmy wartość wyrażenia w arytmetyce 3-cyfrowej:

$$\begin{aligned}
Iloczyn &= fl_3(2\tfrac{1}{3}) * fl_3(3\tfrac{1}{7}) = fl_3(2.33 * 3.14) = fl_3(7.3162) = 7.32 \\
Suma &= fl_3(7.32 + fl_3(45.274)) = fl_3(7.32 + 45.3) = fl_3(52.62) = 52.6 \\
Licznik &= 52.6, \quad Mianownik = 4.22, \\
\frac{Licznik}{Mianownik} &= fl_3(\frac{52.6}{4.22}) = fl_3(12.4645) = 12.5,
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego w 3 cyfrowej arytmetyce wynosi 12.5
Teraz obliczmy wartość tego wyrażenia w 5-cio cyfrowej arytmetyce.
Mamy następujące dane:

$$x = 2\tfrac{1}{3} = 2.33333...; \qquad fl_5(x) = 0.23333 * 10, \quad \epsilon_x = 0.00003333....;$$

$$y = 3fl_5\tfrac{1}{7} = 3.142857142857...; \qquad fl_5(y) = 0.31429 * 10, \quad \epsilon_y = 0.000042857....;$$

$$z = 45.27 \qquad fl_5(z) = 0.4527 * 10^2, \quad \epsilon_z = 0.0$$

$$t = 4\tfrac{2}{9} = 4.222222...; \qquad fl_5(t) = 0.42222 * 10, \quad \epsilon_t = 0.0000222....;$$

Podobnie, obliczmy wartość wyrażenia arytmetycznego w 5-cio cyfrowej arytmetyce

$$\begin{aligned}
Iloczyn &= fl_5(2\tfrac{1}{3}) * fl_5(3\tfrac{1}{7}) = fl_5(2.3333 * 3.1429) = fl_3(7.333333) = 7.3333 \\
Suma &= fl_5(7.3333 + fl_5(45.27)) = fl_5(7.3333 + 45.27) = fl_5(52.6033) = 52.603 \\
Licznik &= 52.603, \quad Mianownik = 4.2222, \\
\frac{Licznik}{Mianownik} &= fl_5(\frac{52.603}{4.2222}) = fl_3(12.4587) = 12.459
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia artmetycznego obliczonego wyżej w 5-cio cyfrowej arytmetyce wynosi 12.459
**Błędy:** Dokładna wartość wyrażenia: $= 12.457$
Błąd bezwględny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $12.5 - 12.457 = 0.043$.
Błąd względny zaokrągleń w 3 cyfrowej arytmetyce $= \dfrac{0.043}{12.457} = 0.00345$; $0.345\%$
Błądu bezwględny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $12.459 - 12.457 = 0.002$.
Błąd względny zaokrągleń w 5 cyfrowej arytmetyce $= \dfrac{0.002}{12.457} = 0.00016$; $0.016\%$.

**Zadanie 1.2** *Oblicz wartość następującego wyrażenia arytmetycznego w 3 i 5-cio cyfrowej arytmetyce liczb w zapisie zienno - przecinkowym*

$$\frac{7\frac{2}{3} * 9\frac{3}{7} + 125.97}{3\frac{7}{9}} + 256.75$$

*Podaj błędy: bezwzględny, względny i procentowy obliczeń.*

Tadeusz STYŠ　　　　Warszawa czerwiec 2023

.

# Contents

# Chapter 2

# Liczby pierwsze. Algorytm Euklidesa

*Liczba* 2 *jest jedyną liczbą najmniejszą parzystą i pierwszą*


Oś liczbowa. Liczba 1 nie jest liczbą pierwszą

## 2.1 Wstęp

Jedną z najważniejszych operacji na liczbach jest rozkład dowolnej liczby naturalnej na czynniki liczb pierwszych. Rozkład liczb na czynniki pierwsze podajemy na podstawie fundamentalnego twierdzenia arytmetyki.
Bezpośrednią konsekwencją rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze jest wyznaczanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb naturalnych. Jednym z optymalnych algorytmów wyznaczania namniejszego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych jest *algorytm Euklidesa*.

## 2.2 Liczby pierwsze

Opis liczb pierwszych należy zacząć od definicji

**Defimnicja 2.1** *Liczbę naturalną $p > 1$ nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki, to jest liczbę* 1 *i samą siebie $p$. To znaczy ze liczby pierwsze dzielą się tylko przez liczbę* 1 *i przez siebie samą. Każda inna liczba nazywa się liczbą złożoną.*

Zauważmy, że liczba natyralna $p = 1$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż ma tylko jeden dzielnik samą siebie i nie jest większa od 1. Liczba 0 również nie jest pierwsza bo jest mniejsza od 1 i ma więcej dzielników niż dwa, gdyż podzielona przez dowolną liczbę naturalną, różną od zera, daje wynik 0. Wymieńmy kilka kolejnych liczb pierwszych

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 59, 61...;$$

Z defincji wynika w sposób oczywisty, że liczba $p = 2$ jest jedyną liczbą pierwszą parzystą.
Zbiór liczb pierwszych nie jest zamknięty na operację arytmetyczne. Wystarczy podać kontr-przykład.

**Przykład 2.1** *Mianowicie liczby* $m = 7$ *i* $n = 3$ *są pierwsze jednak ich suma* $m + n = 7 + 3 = 10$ *nie jest liczbą pierwszą i różnica* $7 - 3 = 4$ *też nie jest liczbą pierwszą. Podobnie iloczyn tych liczb* $m * n = 3 * 7 = 21$ *nie jest liczbą pierwszą.*

Jedna z najważniejszych własności liczb pierwszych opisana jest w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 2.1 Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki**. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki rozkład jest jedyny.*
*Inaczej, jeżeli* $n$ *jest liczbą naturalną to istnieją liczby pierwsze*

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_k$$

*takie, że*

$$n = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_k$$

## 2.3 Rozkład liczb na czynniki pierwsze

Z fundamentalnego twierdzenia arytmetyki wiemy, że każda liczba naturalna dodatnia ma postać iloczynu liczb pierwszych. Inaczej, każda liczba naturalna dodatnia $m > 1$ rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Co więcej taki rozkład jest jedyny. To znaczy, że nie ma innego rozkładu tej liczby naturalnej $m$ na czynniki liczb pierwszych, oprócz czynników $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$.
Sposób rozkładu liczby naturalnej $m$ na czynniki pierwsze jest prosty. Mianowicie, dzielimy liczbę $m$ przez kolejne liczby pierwsze. Wtedy liczba $m$ równa się iloczynowi jej dzielników.

**Przykład 2.2** *Rozłóż liczbę* $m = 1638$ *na czynniki pierwsze.*

posłużymy się schematem

$$\begin{array}{l|l} 1638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba 1638 rozkłada się na czynniki $2, 3, 3, 7, 13$
To znaczy

$$1638 = 2 * 3 * 3 * 7 * 13$$

**Przykład 2.3** *Rozłóż liczbę m=5040 na czynniki pierwsze. posłużymy się schematem*

$$\begin{array}{l|l} 5040 & 2 \\ 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba $m = 5040$ rozkłada się na czynniki $2, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 7$, To znaczy

$$5040 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 * 5 * 3 * 7.$$

Zauważmy, że siedem silnia równa się

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

W tym rozkładzie mamy liczby złożone

$$4 = 2 * 2 \quad i \quad 6 = 2 * 3$$

.

### 2.3.1 Zadania

**Zadanie 2.1** *Wiadomo, że liczba naturalna $m$ jest podzielna przez $5$ i rozkłada się na $3$ czynniki pierwsze, których suma równa jest $14$. Znajdź liczbę $m$.*

**Zadanie 2.2** *Wiadomo, że liczba naturalna $m$ jest podzielna przez $5$ i rozkłada się na $3$ czynniki pierwsze, których suma równa jest $19$. Znajdź wszystkie wartości liczby $m$.*

## 2.4 Największy wspólny dzielnik $NWN(a, b)$

Największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych $a$ $i$ $b$ oznaczamy symbolem $NWD(a, b)$. Jednym ze sposobów obliczania największego wsólnego dzielnika danych liczb naturalnych $a$ $i$ $b$ jest rozkład tych liczb na czynniki liczb pierwszych.

Rozpatrzmy kilka przykładów obliczania $NWD(a, b)$ przez rozkład liczb $a$ i R$b$ na czynniki pierwsze

**Przykład 2.4** *Niech liczba $a = 21$ i liczba $b = 57$. Rozkład tych liczb jest oczywisty*

$$21 = 3 * 7 \;\; i \;\; 57 = 3 * 19$$

*Wspólnym dzielnikiem liczb $21$ i $57$ jest liczba $3$, ponieważ liczba $3$ dzieli liczbę $21$ i dzieli liczbę $57$. Poza tym te liczba nie mają innych wspólnych dzielników.*
*Skąd mamy wartość największego wspólnego dzielnika*

$$NWD(21, 57) = 3$$

obliczzanie nai większego wspólnego dzielnika

**Przykład 2.5** *Znajdż największy wspólny dzielnik liczb $42$ i $78$.*

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze według schematu

$$\begin{array}{rl} 42 & | \;\; 2, \\ 21 & | \;\; 3, \\ 7 & | \;\; 7, \\ 1 & | \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 78 & | \;\; 2 \\ 39 & | \;\; 3 \\ 13 & | \;\; 13 \\ 1 & | \end{array}$$

Skąd mamy rozkład liczb

$$42 = 2 * 3 * 7 \;\; i \;\; 78 = 2 * 3 * 13$$

Wspólnymi czynnikami tych liczb są 2 i 3. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 42 i 78 jest liczba $NWD(42, 78) = 2 * 3 = 6$.

Rozpatrzy jeszcze jeden przykład wyznaczania największego wspólnego dzielnika przez rozkład liczb na czynniki pierwsze

**Przykład 2.6** *Znajdź największy wspólny dzielnik liczby* 210 *i liczby* 231

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2, \\ 105 & 3, \\ 35 & 7, \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Skąd mamy rozkład liczb 210 *i* 231 na czynniki pierwsze

$$210 = 2 * 3 * 7 * 5 \quad i \quad 231 = 3 * 7 * 11$$

Wspólnymi dzielnikami tyczh liczb są 3 i 7. Dlatego największym wspólnym dzielnikiem liczb 210 i 231 jest $NWD(210, 231) = 3 * 7 = 21$.
Sprawdzamy, że liczba $NWD(210, 231) = 21$ dzieli liczby 210 *i* 231

$$210 : 21 = 10 \quad oraz \quad 231 : 21 = 11.$$

## 2.5 Algorytm Euklidesa (325-265 B.C.)

Najbardziej efektywnym sposobem wyznaczania największego wspólnego dzielnika jest algorytm Euklidesa. Już w starożytnych czasach w Egipcie, Euklides grecki nauczyciel i dziekan wydzialu nauk przyrodniczych na Uniwersytecie w Aleksandrii podał algorytm na znajdowanie największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.

**Algorytm Euklidesa.** Obliczamy kolejne wyrazy ciągy malejącego reszt

$$r_0 > r_1 > r_2 > r_4 > ... > r_{n-1} > r_n$$

z dzielenia liczb $r_0, r_1, ..., r_n$, startując z danych liczb $r_0$ i $r_1$

$$\begin{array}{lcll} \frac{r_0}{r_1} & = & k_2 + \frac{r_2}{r_1}, & r_2 = r_0 - k_2 * r_1 \\ \frac{r_1}{r_2} & = & k_3 + \frac{r_3}{r_2}, & r_3 = r_1 - k * 3 * r_2 \\ \frac{r_2}{r_3} & = & k_4 + \frac{r_4}{r_3}, & r_4 = r_2 - k_4 * r_3 \\ . & . & ........... & ... \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} & = & k_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{r_n}, & r_n = r_{n-2} - k_n * r_{n-1} \end{array}$$

Zauważmy, że powyższe wzory na reszty $r_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n$, możemy zapisać jednym wzorem rekurencyjnym

$$r_i = r_{i-2} - k_i * r_{i-1}, \quad dla \ \ i = 2, 3, ..., n, \tag{2.1}$$

Tutaj współczynnik całkowity $k_i = E[\frac{r_i}{r_{i+1}}]$.[1]
Ostatni wyraz ciągu $r_n \neq 0$ różny od zera jest największym wspólnym dzielnikiem dwóch pierwszych wyrazów $r_0,\ r_1$, piszemy

$$r_n = NWD(r_0, r_1).$$

To wynika ze wzoru rekurencyjnego (2.1). Mianowicie, jeżeli liczba $d = NWD(r_0, r_1)$ jest dzielnikiem liczb $r_0$ i $r_1$ to $d$ jest również dzielnikiem każdej następnej reszty

$$r_2 = r_0 - k_2 * r_1$$

$$r_i = r_{i-2} - k_i * r_{i-1}, \ \ dla \ \ i = 2, 3, ..., n,$$

Konstrukcje ciągu rekurencyjnego (2.1) wijaśnimy na przykładach.

**Przykład 2.7** *Znajdż największy wspólny dzielnik liczb* $r_0 = 78$ *i* $r_1 = 42$ *stosując algorytm Euklidesa (2.1)*

1. Dzielimy liczbę większą $r_0 = 78$ przez liczbę mniejszą $r_1 = 48$, według schematu

$$\frac{r_0}{r_1} = k_2 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad\qquad r_0 = k_2 * r_1 + r_2$$
$$\frac{78}{42} = 1 + \frac{36}{42}, \quad k_2 = 1, \quad 78 = 1 * 42 + 36.$$

i obliczamy resztę $r_2$ z dzielenia liczb $r_0 = 78$ przez $r_1 = 42$

$$r_2 = r_0 - k_2 * r_1,$$

$$r_2 = 78 - 1 * 42 = 36.$$

gdzie $k_2 = E[\frac{r_0}{r_1}]$ oznacza całość z dzielenia $r_0$ przez $r_1$.
[2]

2. Podstawiamy $r_1 = 42,\ \ r_2 = 36$ i dzielimy liczbę większą $r_1 = 42$ przez liczbę mniejszą $r_2 = 36$, według schematu

$$\frac{r_1}{r_2} = k_3 + \frac{r_3}{r_2}, \qquad\qquad r_1 = k_3 * r_2 + r_3$$
$$\frac{42}{36} = 1 + \frac{6}{36}, \quad k_3 = 1, \quad 42 = 1 * 36 + 6.$$

i obliczamy resztę z dzielenia liczb $r_1 = 42$ i $r_2 = 36$

$$r_3 = r_1 - k_3 * r_2,$$

$$r = 42 - 36 = 6.$$

3. Podstawiamy $r_2 = 36,\ \ r_3 = 6$ i dzielimy liczbę większą $r_2 = 36$ przez liczbę mniejszą $r_3 = 6$, według schematu

$$\frac{r_2}{r_3} = k_4 + \frac{r_4}{r_3}, \qquad\qquad r_2 = k_4 * r_3 + r_4$$
$$\frac{36}{6} = 6, \qquad k_4 = 6, \quad 36 = 6 * 6 + 0.$$

[1] E[x] entire of $x$ oznacza całość z liczby x
[2] E[x] entire of $x$ oznacza całość z liczby x

i obliczamy resztę z dzielenia liczb $r_2 = 42$ i $r_3 = 36$

$$r_4 = 36 - k_4 * 6,$$

$$r_4 = 36 - 36 = 0.$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 78 i 42 jest ostatnia reszta $r_3 = 6$ różna od zera, piszemy $NWD(78, 36) = 6$

Rozpatrzymy następny przykład zastosowania algorytmu Euklidesa (2.1).

**Przykład 2.8** *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* $r_0 = 1995$ *i* $r_1 = 1190$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie znajdujemmy największy wspólny dzielnik liczb 1995 *i* 1190 stosując wzór (2.1)

$$\begin{array}{cc}
r_0 = 1995, \ \ r_1 == 1190 & | \quad reszta\ r \\
-------- & --- \\
\dfrac{1995}{1190} = 1 + \dfrac{805}{1190} & | \quad r_2 = 805 \\
\dfrac{1190}{805} = 1 + \dfrac{6}{385} & | \quad r_3 = 385 \\
\dfrac{805}{385} = 2 + \dfrac{35}{385} & | \quad r_4 = 35 \\
\dfrac{385}{35} = 11 & | \quad r_5 = 0
\end{array}$$

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 1995 i 1190 jest ostatnia reszta $r_4 = 35$ różna od zera, piszemy $NWD(1995, 1190) = 35$

**Przykład 2.9** *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 975 *i* 690

**Rozwiązanie**.
Stosujemy wyżej opisany algorytm Euklidesa obliczajmy kolejne reszty

$$\begin{array}{cc}
a = r_0 = 975, \ \ b = r_1 = 690 & | \quad reszta \\
----------- & ---------- \\
\dfrac{975}{690} = 1 + \dfrac{285}{690} & | \quad r_2 = 975 - 1 * 690 = 285 \\
\dfrac{690}{285} = 2 + \dfrac{120}{285} & | \quad r_3 = 690 - 2 * 285 = 120 \\
\dfrac{285}{120} = 2 + \dfrac{45}{120} & | \quad r_4 = 285 - 2 * 120 = 45 \\
\dfrac{120}{45} = 2 + \dfrac{30}{45} & | \quad r_5 = 120 - 2 * 45 = 30 \\
\dfrac{45}{30} = 1 + \dfrac{15}{30} & | \quad r_6 = 45 - 1 * 30 = 15 \\
\dfrac{30}{15} = 2 & | \quad r_7 = 0
\end{array}$$

Ciąg reszt

$$975 > 690 > 285 > 120 > 45 > 30 > 15$$

jest malejący.
Ostatnia reszta z dzielenia $r_6 = 15$ różna od zera jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych $r_0 = 975$ i $_1 = 690$, piszemy

$$NWD(975, 690) = 15.$$

Zauważmy, że największy wspólny dzielnik $r_6 = 15$ liczb $r_0 = 975$ i $r_1 = 690$ jest również największym wspólnym dzielnikiem wszystkich poprzednich reszt

$$r_2 = 285,\ r_3 = 120,\ r_4 = 45,\ r_5 = 30,\ r_6 = 15$$

[3]

## 2.6 Najmniejsza wspólna wielokrotność

Wspólną wielokrotnością danych liczb naturalnych $a, b$ jest trzecia liczba naturalna $m$, która jest podzielna przez obie liczby $a$ i $b$. Wspólnych wielokrotności danych liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Wybieramy najmniesza z nich, piszemy $NWW(a, b)$

**Przykład 2.1** *Dla liczb* 5 *i* 7 *wspólną wielokrotnością jest ich iloczyn* $5 * 7 = 35$. *Liczba* 35 *jest najmniejsza wspólna wielokrotność liczb* 5 *i* 7. *Inną wspólną wielokrotność liczb* 5 *i* 7 *jest liczba* 70, *ponieważ* $70 : 5 = 24$ *i* $70 : 7 = 10$. *Jednak* 70 *nie jest najmnieszą wspólną wielokrotnością liczb* 5 *i* 7.

Najmniejszą wspólną wielokrotność znajdujemy przez rozkład danych liczb na czynniki liczb pierwszych.

**Przykład 2.2** *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotnść liczb* 120 *i* 210
*Rozkładamy liczby* 120 *i* 210 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{rl} 120| & 2, \\ 60| & 2, \\ 30| & 2, \\ 15| & 3, \\ 5| & 5 \\ 1| & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 210| & 2 \\ 105| & 3 \\ 35| & 5 \\ 7| & 7 \\ 1| & \\ | & \end{array}$$

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : $2, 3$ i $5$. Następnie do iloczynu $2*3*5$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki 4 i 7.
Najmniejszą wspólną wielokrotnoscą jest iloczyn tych czynników

$$NWW(120, 210) = 2 * 3 * 5 * 4 * 7 = 1540$$

**Przykład 2.3** *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotnść liczb* 910 *i* 1155
*Rozkładamy liczby* 910 *i* 1190 *na czynniki pierwsze według schematu*

$$\begin{array}{rl} 910| & 2, \\ 455| & 5, \\ 91| & 7, \\ 13| & 13, \\ 1| & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 1155| & 3 \\ 385| & 5 \\ 77| & 7 \\ 11| & 11 \\ 1| & \end{array}$$

[3] Prosty algorytm Euklidesa z powodzeniem stosuje się w systemach obliczeniowych. Jest łatwy w pisaniu kodu w językach programowania.

Wybieramy wspólne czynniki w rozkładzie obu liczb : 5 i 7. Następnie do iloczynu $5 * 7$ dopisujemy czynniki, które nie są wspólne, to znaczy nie powtarzają się. To są czynniki $2, 3, 11, 13$.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością jest iloczyn tych czynników

$$NWW(910, 1155) = 5 * 7 * 2 * 3 * 11 * 13 = 30030$$

### 2.6.1 Zadania

**Zadanie 2.3** *Rozłóż na czynniki pierwsze liczby*

*(i)* $a = 184$

*(ii)* $b = 6006$

**Zadanie 2.4** *Podaj resztę z dzielenia liczby a przez liczbę b*

*(i)* $a = 254 \quad i \quad b = 15$

*(ii)* $b = 2672 \quad i \quad b = 848$

**Zadanie 2.5** *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb* 425 *i* 125

*(i) przez rozkład tych liczb na czynniki pierwsze.*

*(ii) stosując algorytm Euklidesa*

**Zadanie 2.6** *Znajdź największy wspólny dzielnik liczb stosując algorytm Euklidesa*

$$2672 \ \ i \ \ 848$$

**Zadanie 2.7** *Wyznacz wszystkie rozwiązania układu równań*

$$x + y = 180$$

$$NWD(x, y) = 30$$

[4]

**Zadanie 2.8** *Ile wspólnych wyrazów mają ciągi arytmetyczne*

$$5, 8, 11, 14, ..., ; \quad i \quad 3, 7, 11, 15, ..., ;$$

**Zadanie 2.9** *Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność liczb*

*(i)* 25 *i* 235

*(ii)* 512 *i* 5040

**Zadanie 2.10** *Czy liczbę pierwszą p można przedstawić w postaci iloczynu różnicy i sumy liczb naturalnych a i b*

$$p = (a - b)(a + b)$$

**Zadanie 2.11** *Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej* $p > 4$ *liczba* $(p-1)(p+1)$ *jest podzialna przez* 24

[4] NWD(x,y) oznacza największy wspólny dzielnik liczby x i liczby y.