SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 17.1: RACHUNEK PRAWDAPODOBIESTWA,

20 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

Contents

Chapter 1

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Wstęp

Podstawy rachunku prawdopodobieństwa stworzyli Pascal (1623-1662 n.e.) i
Fermat (1601-1665 n.e.) w połowie XVII-go wieku. W wiekach XVIII i XIX ważnym odkryciem było prawo wielkich liczb J. Bernoulliego i prace A. Moivre, P. Laplasa i S. Poissona. Czebyszewa, Browna i Kołmogorowa.
Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zjawiskami losowymi (przypadkowymi), to jest takimi zjawiskami, których przebiegu czy wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć. Dzieje się tak dlatego, że na przebieg zjawiska losowego wpływ ma na ogół wiele przyczyn, z których jedynie część udaje się kontrolować.
Wyniki zjawisk (doświadczeń) losowych nazywamy zdarzeniami losowymi.
Jeżeli doświadczenie losowe powtórzymy n razy i przy tym w tych n doświadczeniach dokładnie k razy zaobserwujemy wynik A (zdarzenie losowe A), to liczbę

$$\frac{k}{n}$$

nazywamy częstością zdarzenia losowego A w serii n doświadczeń.

W zjawiskach masowych częstości występowania każdego zdarzenia losowego mają tą własność, że wraz ze wrostem liczby n, te częstości "stabilizują się" coraz bardziej "blisko" pewnej liczby charakterystycznej dla tego zdarzenia.
Ogólnie w doświadczeniach powtarzanych w tych samych warunkach dla każdego doświadczenia, gdy możliwe są dwa wyniki, liczba "charakterystyczna" jest bliska połowie liczby doświadczeń.
Wtedy częstości

$$\frac{k_n}{n} \to \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots;$$

dążą do $\frac{1}{2}$, gdy liczba doświadczeń $n \to \infty$ dąży do nieskoćzoności.

Przykład 1.1 *Na przykład rzucając symetryczną monetą* $n = 100,\ 200$ *lub więcej razy zaobserwujemy około połowę reszek i około połowę orłów.*

Niżej podane wyniki w 100 i 200 rzutach monetą wskazują na stabilizację częstości "blisko" $\frac{1}{2}$ dla ilości doświadczeń $n \geq 200$.

(1.1)

Tablica

Ilość rzutów	liczba reszek	liczba orłów	częstość	częstość—
n	k	n-k	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n}$—
100	61	39	0.61	0.39—
200	102	98	0.51—	0.41

1.2 Zdarzenia elementarne

W kaḋym doświadczeniu losowym możemy wyróżnić najprostrze wyniki zwane zdarzeniami elementarnymi.
Zbiór zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω.

Przykład 1.2 *Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest zbiór*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

złożony z dwóch zdarzeń elementarnych ω_1, ω_2, *gdzie zdarzenie elementarne* ω_1 *zachodzi, gdy w rzucie monetą pojawi się reszka, zdarzenie elementarne* ω_2 *zachodzi, gdy pojawi się orzeł.*

Prawdopodobieństwo to jest liczba wokół, której stabilizuje się częstość, gdy ilość doświadczeń losowych zmiarza do niskończoności

Niżej stabilizacje częstości wokół liczby prawdopodobieństwa wstępnie opiszemy na wzorcowych przykładach.

Rzut monetą. Zaczynamy od najprostrzego doświadczenie rzutu monetą. Rzucając monetą, możliwe są dwa wyniki reszka lub orzeł, innych możliwości nie ma.

Pytamy, jakie szanse mamy, żeby pojawiła się reszka ?

Z dwóch możliwych wyników reszka, orzeł, jeden jest dla reszki i jeden jest dla orła. Zatem szansa pojawienia się reszki równa jest $\frac{1}{2}$ oraz pojawienia się orła również równa jest $\frac{1}{2}$.

Jeżeli wynik pojawienia się reszki oznaczymy literą A, a wynik pojawienia się orła literą B to prawdopodobieństwo pojawienia się reszki oznaczamy symbolem $P(A)$, a prawdopodobieństwo pojawienia się orła symbolem $P(B)$.
Wtedy piszemy

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo $\frac{1}{2}$ oznacza, że w dużej ilości rzutów oczekujemy połowę reszek i połowę orłów.

Przykład 1.3 *Policz ile razy pojawi się reszka i ile razy pojawi się orzeł w 10-ciu rzutach monetą.*

Załóżmy, że reszka pojawiła się za pierwszym, piątym, ósmym i dziesiątym rzutem, razem 4 razy, natomiast orzeł pojawił się 6 razy.

Zdarzenie pojawienia się reszki oznaczamy literą A, zdarzenie pojawienia się orła oznaczamy literą B.
Obliczamy częstość pojawienia się reszki

$$Czestosc(A) = \frac{4\ zdarzenia\ sprzyjajace}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Podobnie obliczamy częstość pojawienia się orła jako stosunek 6-ciu zdarzeń sprzyjających do wszystkich 10-ciu zdarzeń możliwych

$$Czestosc(B) = \frac{6\ zdarzen\ sprzyjajacych}{10\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Przykład 1.4 *W klasie było 20 uczniów. Każdy uczeń rzucił symetryczną monetą 50 razy. Niżej w tablicy 1.2 podane są częstości wypadnięcia reszki w 100 i 1000 rzutów.*

(1.2)

Tablica

Liczba rzutów	liczba reszek	liczba orłów	częstość	częstość—
n	k	n-k	$\frac{k}{n}$	$\frac{n-k}{n}$—
100	54	46	0.54	0.45—
1000	517	483	0.517—	0.483

Widzimy, że częstość pojawienia się reszki na 100 rzutów monetą równa jest 0.54, natomiast na 1000 rzutów równa jest 0.517. Częstość 0.517 na 1000 rzutów bliższa jest liczbie charakterystyczne równej 0.5 niż częstość 0.54 na 100 rzutów monetą w tym przykładzie.
Ta zaobserwowana prawidłowość polegająca na tym, że częstość zajścia zdarzenia losowego jest "stabilna" około jakiejś stałej wartości, gdy ilość powtórzeń doświadczenia losowego jest duża, leży u podstaw pojęcia prawdopodobieństwa.

Niżej wyjaśnimy jeszcze takie pojęcia jak

- zdarzenia rozłączne - wykluczające
- zdarzenie pewne
- zdarzenie niemożliwe
- prawdopodobieństwo zdarzeń

Dalej oznaczmy literą A zdarzenie pojawienia się reszki, literą B zdarzenia pojawienia się orła w rzucie monetą.
Zdarzenia A i B są rozłączne-wykluczające się, ponieważ zajście zdarzenia A wyklucza zajście zdarzenia B.

Sumę-alternatywę zdarzeń A *lub* B, piszemy

$$A \cup B$$

Obliczamy częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych

$$Czestosc(A \cup B) = Czestosc(A) + Czestosc(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

Częstość alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie częstości zdarzenia A i zdarzenia B.

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń rozłącznych A i B równa jest sumie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zdarzenia B.

W rzucie monetą pojawienie się reszki lub orła jest zadarzeniem pewnym, którego prawdopodobieństwo równe jest 1.

Natomiast zdarzenie, że w rzucie monetą nie pojawi się ani reszka ani orzeł jest zdarzeniem niemożliwym.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równe jest 0

Przykład 1.5 *Rozpatrzmy doświadczenie rzutu kostką o kształcie sześcianu foremnego, na którego ścianach są oczka od 1 do 6.*

W doświadczeniu rzutu kostką odczytujemy ilość oczek na kostce. Możliwy jest jeden z sześciu odczytów

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek\ i\ 6\ oczek$$

następujących zdarzeń elementarnych

zdarzenia ω_1, gdy pojawi się 1 oczko
zdarzenie ω_2, gdy pojawi się 2 oczka
zdarzenie ω_3, gdy pojawi się 3 oczka
zdarzenie ω_4, gdy pojawi się 4 oczka
zdarzenie ω_5, gdy pojawi się 5 oczek
zdarzenie ω_6, gdy pojawi się 6 oczek

Zatem w jednym rzucie kostką jest 6 możliwych wyników

$$1\ oczko,\ 2\ oczka,\ 3\ oczka,\ 4\ oczka,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

Szansa pojawienie się każdej ilości oczek jest taka sama w stosunku do 6 wyników możliwych. To prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{6}$, piszemy

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_2) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_3) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_4) = \frac{1}{6}$$
$$P(\omega_5) = \frac{1}{6}, \qquad P(\omega_6) = \frac{1}{6}$$

Załóżmy, że wykonano $N = 100$ rzutów kostką i zapisano liczbę oczek

Zdarzenie ω_1 pojawiło się 17 razy, to znaczy 1 oczko pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_2 pojawiło się 16 razy, to znaczy 2 oczka pojawiło się 16 razy
Zdarzenie ω_3 pojawiło się 17 razy, to znaczy 3 oczka pojawiło się 17 razy
Zdarzenie ω_4 pojawiło się 18 razy, to znaczy 4 oczka pojawiło się 18 razy
Zdarzenie ω_5 pojawiło się 15 razy, to zmaczy 5 oczek pojawiło się 15 razy
Zdarzenie ω_6 pojawiło się 17 razy, to znaczy 6 oczek pojawiło się 17 razy

W tym doświadczeniu częstością pojawienia się jednego z sześciu wyników są następujące ilorazy:

$$Czestosc(\omega_1) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_2) = \frac{16\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{16}{100} = 0.16$$
$$Czestosc(\omega_3) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.17$$
$$Czestosc(\omega_4) = \frac{18\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{18}{100} = 0.18$$
$$Czestosc(\omega_5) = \frac{15\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{15}{100} = 0.15$$
$$Czestosc(\omega_6) = \frac{17\ zdarzen\ sprzyjajacych}{100\ zdarzen\ mozliwych} = \frac{17}{100} = 0.16$$

Zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych rozłącznych - wykluczających.

Dlatego alternatywa zdarzeń elementarnych

$$A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$$

jest zdarzeniem pewnym.
Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego A równe jest 1, piszemy

$$P(A) = P(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6) = 1$$

Również częstość zdarzenia pewnego równa jest 1, ponieważ równa jest sumie częstości elementarnych

$$Czestosc(\omega) = \frac{17}{100} + \frac{16}{100} + \frac{17}{100} + \frac{18}{100} + \frac{15}{100} + \frac{17}{100} = 1$$

1.3 Zdarzenia jednakowo prawdopodobne

W powyższych doświadczeniach rozpatrywaliśmy zdarzenia losowe jednakowo prawdopodobne. W rzucie monetą pojawienie się orła lub reszki zachodzi z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W rzucie kostką prawdopodobieństwo pojawienia się

$$1\ oczka,\ 2\ oczek,\ 3\ oczek,\ 4\ oczek,\ 5\ oczek,\ 6\ oczek$$

jest to samo i równe $\frac{1}{6}$.

Niżej podajemy definicje Laplace'a prawdopodobieństwa dla N zdarzeń losowych równoprawdopodobnych

Defimnicja 1.1 *Jeżeli dla danego doświadczenia losowego, zbiór zdarzeń elementarnych składa się z N zdarzeń równoprawdopodobnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A równe jest*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

gdzie n jest ilością zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A.

Rozpatrzymy następujący przykład:

Przykład 1.6 *Z talii 52 karty wyciągnięto losowo jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$ następujących zdarzeń:*

(i) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu asa.

(ii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu pika.

(iii) Zdarzenie A polega na wyciągnięciu kiera l lub trefla.

Rozwiązanie (i). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii są 4 asy, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia asa jest $n = 4$.
Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie asa jest równe

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

.
Rozwiązanie (ii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych,˙Prawdopodobieńst
wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 pików, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia pika jest $n = 13$. Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcia pika jest równe

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

.
Rozwiązanie (iii). Zbiór zdarzeń elementarnych składa się z $N = 52$ zdarzeń równoprawdopodobnych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej karty jest to samo i równe $\frac{1}{52}$.
Ponieważ w talii jest 13 kierów i 13 trefli, dlatego liczba zdarzeń sprzyjających wyciągnięcia kiera lub trefla jest

$$n = 13 + 13 = 26$$

Zatem prawdopodobieństwo wyciągnięcie kiera lub trefla jest równe

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

.
Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład zdarzeń losowych.

Przykład 1.7 *Na liście w szkole jest 250 dziewcząt i 200 chłopców. Wybrano z listy losowo jedno nazwisko. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że to jest*
(a) dziewczynka, (b) chłopiec.

Rozwiązanie (a). Razem na liście jest $250+200 = 450$ uczniów. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N = 450$, zdarzeń. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_i, \ i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest dziewczynka równa się $n = 250$. Prawdopodobieństwo, że to jest dziewczynka

$$P(A) = \frac{250}{450} = \frac{5}{9}$$

Rozwiązanie (b). Podobnie obliczamy prawdopodobieństwo wybrania z listy nazwiska chłopca. Razem na liście jest $250 + 200 = 450$ uczniów. Zbiór wszstkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{450}\}$$

składa się z jest $N = 450$, zdarzeń elementarnych. Kaḋe z tych zdarzeń elementarnych $\omega_1, \ i = 1, 2, 3, \cdots, 450$ polega na wylosowaniu z listy 450 uczniów jedno nazwisko.
Liczba zdarzeń sprzyjających, że to jest chłopiec równa się $n = 200$. Prawdopodobieństwo, że to jest chłopiec

$$P(A) = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

1.4 Zdarzenia losowe złożone

Alternatywa, koniukcja i różnica zdarzeń losowych jest zdarzeniem losowym złożonym.
Zatem, wykonując te operacje na zbiorze zdarzeń elementarnych, otrzymujemy zdarzenia losowe złożone.
Na przykład, w doświadczeniu z rzutem kostką zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych jest zbiór

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

W tym zbiorze Ω wyróżniamy następujące podzbiory jako zdarzenia złożone:

- Zdarzenie pewne określone przez zbiór

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

  wszystkich zdarzeń elementarnych, którego pradopodobieństwo $P(\Omega) = 1$, ponieważ każde ze zdarzeń elementarnych

  $$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \omega_4, \ \omega_5, \ \omega_6$$

  sprzyja zdarzeniu pewnemu Ω.
  Przawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń elemntarnych

  $$P(\omega_i) = \frac{1}{6}. \qquad i =, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to parzysta ilość oczek. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_2 lub ω_4 lub ω_6. To znaczy, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$$

Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Zdarzenia elementarne $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ sprzyjają zajściu zdarzenia A.
Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek mniejsza niż 3.

  To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli wynik rzutu kostką jest jedno oczko lub dwa oczka, gdy prawdziwa jest alternatywa

  $$\omega_1 \cup \omega_2$$

  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_1, \omega_2\} \subset \Omega$$

  Zdarzenia elementarne ω_1, ω_2 sprzyjają zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- oczekiwany wynik zdarzenia A to ilość oczek większa od 3. To zdarzenie losowe zachodzi, jeżeli zdarzy się ω_4 lub ω_5 lub ω_6, gdy pradziwa jest alternatywa $\omega_4 \cup \omega_5 \cup \omega_6$.
  Zatem zdarzenie A jest określone przez podzbiór

  $$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega$$

  zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych. Każde ze zdarzeń $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ sprzyja zdarzeniu A
  Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

  $$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1.5 Operacje na zdarzeniach losowych

Podstawową relacją w zbiorach jest ralacja przynależności elementu do zbioru.
Relację, że element x należy do zbioru Ω, piszemy $x \in \Omega$. Również relację, że x nie jest elementem zbioru Ω, piszemy $x \notin \Omega$.
Zdarzenia losowe rozumiemy jako podzbiory zbioru zdarzeń elementarnych. Operacje na zbiorach takie jak suma, iloczyn i różnica zbiorów odnoszą się również do działań na zdarzeniach losowych, ponieważ są to działania na podzbiorach zbioru zdarzeń elentarnych.

1.6 Zdarzenie przeciwne

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczamy symbolem $A^{'}$. Zdarzenie przeciwne $A^{'}$ zachodzi, jeżeli nie zaszło zdarzenie losowe A.

Na przykład, niech zdarzenie A polega na uzyskaniu parzystej liczby oczek w rzucie kostką. Wtedy

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

jest podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A \subset \Omega$$

Zdarzenie przeciwne A' zachodzi, jeżeli pojawi się nieparzysta liczba oczek

$$A^{'} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

Podzbiór $A^{'}$ jest również podzbiorem zbioru zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad A^{'} \subset \Omega$$

Zauważmy, że zdarzenie przeciwne równe jest różnicy zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

i wydarzenia A
Zatem mamy

$$A^{'} = \Omega - A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} - \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

1.7 Alternatywa zdarzeń

Alterternetywą zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$C = A \cup B$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A lub zachodzi zdarzenie B.
Na przykład: *niech zdarzeniem A będzie liczba oczek na kostce większa od 5, natomiast zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 2.*
Jasne, że zdarzenie

$$A = \omega_6$$

natomiast zdarzenie

$$B = \omega_1$$

Alternatywą tych zdarzeń jest podzbiór

$$C = A \cup B = \{\omega_1, \omega_6\}$$

zbioru zdarzeń elementarnych Ω. Piszemy

$$C = A \cup B \subset \Omega$$

1.8 Koniukcja zdarzeń

Koniukcją zdarzeń losowych A i B jest zdarzenie

$$D = A \cap B,$$

które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B.

Na przykład, niech zdarzeniem A będzie liczba oczek większa od 3, zdarzeniem B niech będzie liczba oczek mniejsza od 5.
Jasne, że zdarzenie A określa podzbiór

$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \subset \Omega,$$

oraz zdarzeniem B określa podzbiór

$$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \subset \Omega$$

Koniukcja $A \cap B$ jest zdarzeniem

$$D = A \cap B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\omega_4\}$$

które składa się z tych samych zdarzeń elmentarnych równocześnie należących do A i do B.

1.9 Zdarzenia rozłączne

Zdarzenia A i B wyłączają się, jeżeli ich koniukcja jest zbiorem pustym. To znaczy $A \cap B = \emptyset$.
Niech na przykład, w doświadczeniu rzutem kostką, niech zdarzenie

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}$$

oznacza pojawienie się jednego oczka lub sześciu oczek, natomiast zdarzenie

$$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

oznacza pojawienie się trzech oczek lub czterech oczek lub pięciu oczek.
Te zdarzenia są rozłączne, gdyż ich koniukcja

$$A \cap B = \{\omega_1, \omega_6\} \cap \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \emptyset$$

jest zbiorem pustym zdarzeń.

1.10 Różnica zdarzeń losowych

Różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi wtedy gdy zdarzenie A zachodzi, natomiast zdarzenie B nie zachodzi.
Na przykład, niech zdarzeniem A będzie parzysta ilość oczek, natomiast zdarzeniem B niech będzie ilość oczek podzielna przez 3.
Jasne, że zdarzenie A zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru

$$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω
natomiast zdarzenie B nie zachodzi, jeżeli nie wylosujemy elementu podzbioru

$$\{\omega_3, \omega_6\} \subset \Omega$$

zbioru Ω.
Zatem różnica zdarzeń losowych A i B to jest zdarzenie

$$E = A - B$$

zachodzi, jeżeli wylosujemy element podzbioru A i jednocześnie nie wylosujemy elementu podzbioru B. Wtedy zdarzenie

$$E = A - B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} - \{\omega_3, \omega_6\} = \{\omega_2, \omega_4\} \subset \Omega$$

1.11 Przykłady zdarzeń losowych

Niżej podajemy przykłady zdarzeń losowych i zdarzeń sprzyjających określonemu zdarzeniu losowemu. Podajemy również opis operacji: alternatywy i koniukcji zdarzeń losowych oraz prawdopodobieństwo zdarzeń sprzyjających i zdarzeń przeciwnych do danego zdarzenia losowego.

Przykład 1.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego zbioru liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązanie (1.8). Zbiór wszystkich zdarzeń możliwych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się $N = 20$ zdarzeń elementarnych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających

$$A = \{5, 10, 15, 20\}$$

składa się z $k = 4$ liczb podzielnych przez 5.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 5 ze zbioru Ω wszystkich możliwych zdarzeń jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru Ω liczby podzielnej przez 5 jest równe $\frac{1}{5}$.

Przykład 1.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb z których co najmniej jedna jest podzielne przez 3.

Rozwiązanie (1.9). W tym przykładzie zdarzeniemi elementarnymi będą wszystkie pary liczb podane w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,5), & (1,7), & (1,9), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,5), & (2,7), & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,5), & (5,7), & (5,9), \\ (7,1), & (7,2), & (7,3), & (7,5), & (7,7), & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{N=6\,\times\,6}$$

Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych składa się z $N = 36$ zdarzeń możliwych.
Zbiór zdarzeń sprzyjających to są te pary liczb wybrane z tablicy (1.9) w których co najmniej

jedna liczba jest podzielna przez przez 3.
Zatem zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A określony w tablicy

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} & & (1,3), & & & (1,9) \\ & & (2,3), & & & (2,9), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,5), & (3,7), & (3,9), \\ & & (5,3), & & & (5,9), \\ & & (7,3), & & & (7,9), \\ (9,1), & (9,2), & (9,3), & (9,5), & (9,7), & (9,9), \end{array} \right\}_{k=20}$$

składa się z $k = 20$ par w których co najmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3.

Zatem prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ z których co majmnie jedna jest podzielna przez 3 jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Przykład 1.10 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3.

Rozwiązanie (1.10). Zbiór wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{6, 12, 18\},$$

że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 3, składa się z $k = 3$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 2 i przez 3 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{3}{20}$$

Przykład 1.11 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 6.

Rozwiązanie (1.11). Zbiór wszystkich zdarzeń losowych

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

składa się z $N = 20$ zdarzeń losowych elementarnych.
Zbiór zdarzeń losowych sprzyjających zdarzeniu

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

że wylosowana liczba jest mniejsza od 6, składa się z $k = 5$ liczb.
Zatem prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej od 6 ze zbioru Ω jest równe

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Przykład 1.12 .
(i) Podaj zbiór zdarzeń wszystkich elementarnych w doświadczeniu rzutem dwoma kostkami.
(ii) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A pojawienia się parzystej sumy liczby oczek w rzucie dwiema kostkami.
(iii) Podaj zdarzenie przeciwne $A^{'}$ do zdarzenia A.

Rozwiązanie (i) Możliwe są następujące wyniki:

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 1, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 2, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 3, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 4, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 5, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.
  lub

- rzucając pierwszą kostką otrzymamy 6, a natępnie rzucając sześć razy drugą kostką, dostaniemy liczbę oczek 1 lub 2 lub 3 lub 4 lub 5 lub 6.

Zatem wynikiem tego doświadczenia jest zbiór wszystkich możliwych par zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6), \end{array} \right\}_{N=6\times 6}$$

Rozwiązanie (ii). W rzucie dwiema kostkami suma oczek jest parzysta, jeżeli na pierwszej i jednocześnie na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo jednocześnie na pierwszej i na drugiej kostce pojawi się nie parzysta ilość oczek. Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zbiór zdarzeń sprzyjających

$$\omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1), & (1,3), & (1,5), \\ (2,2), & (2,4), & (2,6), \\ (3,1), & (3,3), & (3,5), \\ (4,2), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,4), & (5,5), \\ (6,2), & (6,4), & (6,6), \end{array} \right\}$$

ma $\dfrac{36}{2} = 18$ elementy. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenie A, że w sumie wypadnie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie (iii). Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A w rzucie dwiema kostkami będzie nie parzysta suma oczek. To znaczy, że na pierwszej kostce pojawi się nieparzysta liczba oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, albo odwrotnie, na pierwszej kostce pojawi się parzysta ilość oczek, natomiast na drugiej kostce pojawi się nie parzysta liczba oczek. Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu

$$\omega^{'} = \Omega - \omega = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,2), & (1,4), & (1,6), \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,2), & (3,4), & (3,6), \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,2), & (5,4), & (5,6), \\ (6,1), & (6,3), & (6,5), \end{array} \right\}$$

Ponieważ wszystkich zdarzeń elementarnych jest $6 \times 6 = 36$, to zdarzeń sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu jest $\dfrac{36}{2} = 18$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego $A^{'}$, że w sumie wypadnie nie parzysta ilość oczek jest równe

$$P(A^{'}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Przykład 1.13 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, bez powtórzeń.*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$$

wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$.

Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?.
Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli różnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy wzorem

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! * (49-6)!} = \frac{49!}{6! * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbioru

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 48, 49\}$$

Tylko jedna szóstka liczb wygrywa. która sprzyja zdarzeniu A. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczby są trafione. To znaczy, że w tym zbiorze liczb

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

pięć liczb są ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$.
Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów.
W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie zo stały wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

1.12 Zadania

Zadanie 1.1 .
(i) Wykonaj 50 rzutów monetą i policz ilość reszek w 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutach. Oblicz czętości pojawienia się reszki i orła dla* 10, 20, 30, 40 *i* 50 *rzutów monetą.*
(ii) Wskaż liczbę charakterystyczną dla tego doświadczenia około której stabilizują się obliczone częstości.

Zadanie 1.2 *Wykonaj 10 rzutów dwoma jednakowymi monetami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch orlów w 10 rzutach.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się orła i reszki w 10 rzutach.*

Zadanie 1.3 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma monetami jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch orlów.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się orła i reszki.*

Zadanie 1.4 *Wykonaj 10 rzutów dwoma kostkami.*
(*i*) *Oblicz częstość pojawienia się dwóch takich samych oczek.*
(*ii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz częstość pojawienia się oczek, których suma równa jest 7.*

Zadanie 1.5 *Rozpatrz model probabilistyczny rzutu dwoma kostkami sześciennymi jeden raz.*
(*i*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się dwóch takich samych ilości oczek.*
(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 4.*
(*iii*) *Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się ilości oczek, których suma równa jest 12.*

Zadanie 1.6 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4.

Zadanie 1.7 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo dwie liczby, bez powtórzeń. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub 4.

Zadanie 1.8 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 3 i przez 4.

Zadanie 1.9 *Ze zbioru liczb*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.18, 19, 20\}$$

wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby mniejszej 5.

Zadanie 1.10 *Zbiór zdarzeń elementarnych*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

(*i*) *Oblicz alternatywę i koniukcję zdarzeń losowych złożonych*

$$A = \{\omega_1, \omega_6\}, \qquad B = \{\omega_2, \omega_6\}$$

(*ii*) *Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B.*
(*iii*) *Znajdź zdarzenia przeciwne $A^{'}$ i $B^{'}$ do zdarzeń losowych A i B.*
(*iv*) *Oblicz prawdopodobieństwa zcdarzeń losowych przeciwnych $A^{'}$ i $B^{'}$.*

Zadanie 1.11 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w grze liczbowej ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 20\}$ (i) pięciu liczb, (ii) czterech liczb, bez powtórzeń.*

1.13 Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace'a definicja prawdopodobieństwa jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu losowemu A do ilości N wszystkich zdarzeń elementarnych, w istocie ma swoje uzasadnienie w zbiorze zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Mianowicie, jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne, to znaczy, że pierwsze zdarzenie elementarne pojawia się z prawdopodobieństwem p_1, drugie z prawdopodobieństwem p_2, i tak dalej oraz $N-te$ zdarzenie elementarne pojawia się zprawdopodobieństwem p_N i te prawdopodobieństwa są równe

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = p,$$

wtedy

$$p = 1 \quad i \quad p = \frac{1}{N}$$

Skąd otrzymamy prawdopodobieństwo jako iloraz n zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Bardziej ogólnym modelem prawdopodobieństwa jest definicja aksjomatyczna, która obejmuje również zbiór zdarzenia elementarnych różno prawdopodobnych.

Defimnicja 1.2 *Oznaczmy przez Ω zbiór zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem zdarzenia losowogo $A \in \Omega$ nazywamy funkcje rzeczywistą $P(A)$, która spełnia nastepujące warunki:*

(a) $P(A) \geq 0$, *dla każdego zdaerzenia* $A \in \Omega$.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$ *zachodzi równość;* $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 49 - ciuliczb$

(c) $P(\omega_1) = 1$.

Przykład 1.14 *Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania w totolotku ze zbioru liczb* $\{1, 2, ..., 49\}$ *(i) sześciu liczb, (ii) piętciu liczb, (iii) czterech liczb*

Rozwiązanie (i). Najpierw ustalmy zbiór zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jasne, że zdarzeniem elementarnym będzie sześć liczb $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ wybranych losowo ze zbioru liczb $\{1, 2, ..., 49\}$, to znaczy $n_i \in \{1, 2, ..., 49\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pytanie ile będzie różnych szóstek ze zbioru 49-ciu liczb?. Rozumiemy, że dwie szóstki są różne, jeżeli rożnią się co najmiej jedną liczbą. Prostą odpowiedź na to pytanie znajdujemy w kombinatoryce. Mianowicie, ilość różnych szóstek równa jest ilości kombinacji z 49-ciu liczb po sześć liczb. Tą liczbę kombinacji określamy symbolem Newtona

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \, * (49-6)!} = \frac{49!}{6! \, * 43!} = 13983816$$

Zatem, zbiór wszystkich kombinacji $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ sześciu liczb wybranych z 49-ciu liczb

$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych.
Odpowiedź: Niech $A \in \Omega$ oznacza zdarzenie wylosowania sześciu liczb ze zbiru Ω. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia równe jest

$$P(A) = \frac{1}{13983816}$$

Zauważmy, że zgodnie z aksomatyczną definicją prawdopodobieństw funkcja $P(A)$ określona na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω spełnia warunki definicji. Mianowicie, mamy

(a) $P(A) = \dfrac{1}{13983816} \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \Omega$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo-prawdopodobne.

(b) Dla każdej pary wyłączającej się zdarzeń losowych $A, B \in \Omega$, jeżeli zdarzenie A zachodzi to zdarzenie B nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = \frac{1}{13983816}, \quad \text{oraz} \quad P(B) = 0.$$
Zatem, mamy równość;
$$P(A \cup B) = \frac{1}{13983816} + 0 = P(A) + P(B)$$
Podobnie, lub jeżeli zdarzenie B zachodzi to zdarzenie A nie zachodzi.
Wtedy
$$P(A) = 0, \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{1}{13983816}.$$
Zatem, mamy równość:
$$P(A \cup B) = 0 + \frac{1}{13983816} = P(A) + P(B)$$

(c) Jeżeli wybierzemy wszystkie możliwe szóstki, to wśród nich pojawi się napewno losowana szóstka. To znaczy prawdopodobieństwo od wszystkich zdarzeń elementarnych $P(\Omega) = 1$.

Rozwiązanie (ii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych
$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$
zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których pięć liczb jest trafnych. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że jedną liczbą nie trafioną może być k_1 lub k_2 lub k_3 lub k_4 lub k_5 lub k_6. Zatem, jedną z pięciu liczb trafionych możemy zastąpić liczbą nie trafioną otrzymując inną piątkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{1} = 6$ sześć sposobów. W ten sposób znajdujemy sześć różnych szóstek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każdą z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na jedną z sześciu nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych pięciu liczba jest $6 * 43 = 258$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych 5 liczby z wylosowanych sześciu liczb równe jest
$$P(A) = \frac{258}{13983816} = 0.00001845$$

Rozwiązanie (iii). Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Wiemy z rozwiązania (i), że zbiór zdarzeń elementarnych
$$\Omega = \{\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}, 1 \leq n_i \leq 49,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$$

zawiera $\binom{49}{6} = 13983816$ elementów.
Oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz wytypował liczby $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ wśród których cztery liczby jest trafne. To znaczy, że w tym zbiorze liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ cztery liczby jest ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$. Teraz policzmy ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Najpierw, zuważmy, że dwie liczby nie trafione to mogą być pary k_1, k_2 lub k_1, k_3 lub ...., lub k_4, k_5 lub ...,lub k_5, k_6 Ilość tych par równa jest $\binom{6}{2} = 15$. Zatem, dwie z czterech liczb trafionych możemy zastąpić liczbami wylosowanymi w totolotku, ale nie trafionionymi przez gracza. W ten sposób otrzymujemy inną czwórkę liczb trafionych. Taką zamianę można dokonać na $\binom{6}{2} = 15$ pietnaście sposobów. W ten sposób otrzymujemy 15 różnych czwórek jako zdzarzenia sprzyjających zdarzeniu A. Ponadto, pozostało 43 liczby nie wylosowane w totolotka. Każde dwie liczby z tych 43 nie wytypowanych w grze można wymienić na $\binom{43}{2} = 21 * 43$ sposobów na dwie liczby nie trafionych przez gracza. Zatem, zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A wylosowania poprawnych czterech liczba jest $15 * 21 * 43 = 13545$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo wylosowania poprawnych czterech liczb z wylosowanych sześciu liczb równe jest

$$P(A) = \frac{13545}{1398316} = 0.000969$$

Zadanie 1.12 *Niech sześć liczb $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ będzie wynikiem losowania totolotka. Gracz wytypowł sześć liczb $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz trafił tylko w trzy liczby ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$, sześciu liczb, pozostałe trzy liczby były nie trafione.*

1.14 Prawdopodobeństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia dowolnego zdarzenia A pod warunkiem, że już zaszło zdarzenie B oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i definiujemy wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{gdy} \quad P(B) > 0.$$

Powyżesze określenie prawdopodobieństwa warunkowego wyjaśniamy na następującym przykładzie:

Przykład 1.15 *W stadzie jest razem N owiec i baranów. Wiadomo, że ilość owiec i baranów jest następująca:*

- *m baranów*
- *k baranów białych.*
- *razem białych owiec i baranów jest n, $k \leq n$.*

Niech A oznacza zdarzenie, że losowo wybrany czworonogi jest biały, natomiast niech B oznacza zdarzenie, że wybrany losowo czworonogi jest baranem. Zakładając, że prawdopodobieństwo wyboru każdego czworonogiego owcy czy barana jest to samo. Wtedy obliczamy łatwo następujące prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{n}{N}, \qquad P(B) = \frac{m}{N}, \qquad P(A \cap B) = \frac{k}{N}$$

Wybierając losowo białego barana pytamy o warunkowe prawdopodobieństwo $P(A|B)$. To warunkowe prawdopodobeństwo wylosowania białego barana jest równe

$$P(A|B) = \frac{k}{m}$$

Skąd otrzymamy następujący wzór:

$$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{N}}{\frac{m}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zgodnie z definicją, powyższy wzór określa warunkowe prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdy $P(B) > 0$.

1.15 Prawdopodobieństwo całkowite

Aby wprowadzić pojęcie prawdopodobieństwa całkowitego posłużymy się następującym przykładem:

Przykład 1.16 *Przypuśćmy, że jakaś fabryka produjkująca żarówki ma wadliwość 5 żarówek na 100 wyprodukowanych. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa wynosi* 0.05. *Przypuśćmy teraz , że zainstalowano w tej fabryce nową linię produkcji, która produkuje tylko 1 żarówkę wadliwą na 100 wyprodukowanych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka z tej fabryki jest wadliwa?*

Interesujące prawdopodobieństwo to tak zwane prawdopodobieństwo całkowite. Gdyby nowa linia produkcji produkowała tyle samo żarówek co stara linia produkcyjna, to prawdopodobieństwo całkowite powinno być równe średniej wadliwości, to znaczy $\frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$. Oczywistście zakładamy, że żarówki wyprodukowane przez obie linie produkcyjne zostały dokładnie wymieszane.. Odpowiedź na pytanie w tym przykładzie wynika z następującego twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ wyłaczają się parami i ich parwdopodobieństwa $P(B_i) > 0,\ i = 1, 2, ...n$. Ponadto, jeżeli alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ z przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, zachodzi następujący wzór:*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)$$

Stosując to twierdzenie do opisanego wyżej przykładu, załóżmy, że nowa linia produkcyjna produkuje trzy razy więcej żarówek niż stara linia produkcyjna. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie losowe, że wybrana żarówka jest wadliwa. Również oznaczmy przez B_1 i B_2 zdarzenia, że losowo wybrana żarówka została wyprodukowana na starej lini produkcyjnej i nowej lini produkcyjnej, odpowiednio. Stosując twierdzenie o całkowitym prawdopodobieństwie, sprawdzamy założenia tego twierdzenia. Po pierwsze, widzimy że zdarzenia B_1 i B_2 są rozłączne. Po drugie,żadne z tych zdarzeń nie jest zdarzeniem niemożliwym, czyli prawdopodobieństwa ich zajścia są dodatnie, $P(B_1) > 0$ i $P(B_2) > 0$. Następnie, alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy $B_1 \cup B_2 = \Omega$.
Z treści przykładu wynika, że

- $P(B_1) = 0.3$,
- $P(B_2) = 0.7$.

oraz, że dane prawdopodobieństwa warunkowe są następujące:

- $P(A/B_1) = 0.05$,
- $P(A/B_2) = 0.01$.

Z tezy twierdzenia wynika

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = 0.3 * 0.05 + 0.7 * 0.01 = 0.036$$

Zatem średnio 36 żarówek na 1000 żarówek wyprodukowanych w fabryce to są żarówki wadliwe.
Zauważmy, że jeżeli obie linie produkcyjne produkują tą samą ilość żarówek, wtedy prawdopodobieństwa B_1 i B_2 są równe

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$

i prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B2)P(A/B_2) = \frac{1}{2}(0.05 + 0.01) = 0.03$$

Rozpatrzmy inny przykład.

Przykład 1.17 *Powiedzmy, że stan pogody dla Warszawy w miesiącu kwietniu można schrakteryzować za pomocą jednego z trzech typów pogody* I, II, III. *Z długotrwałych obserwacji wywnioskowano, że prawdopodobieństwa tego, że w wybranym losowo dniu kwietnia będzie określony typ pogody są odpowiednio równe:* 0.2, 0.1, 0.7. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.*

Oznaczmy przez B_1, B_2, B_3 zdarzenia polegają na tym, że w losowo wybranym dniu kwietnia wystąpi odpowiednio I-szy lub II-gi, lub 3-ci typ pogody. Oznaczmy przez A interesujące nas zdarzenie, że w losowo wybranym dniu kwietnia będzie padał deszcz.
Teraz sprawdzamy założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.
Po pierwsze zauważamy, że zdarzenia B_1, B_2, i B_3 są parami rozłączne. To znaczy koniukcja tych par zdarzeń jest zbiorem pustym $\emptyset$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_3 = \emptyset, \quad B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

Po drugie, prawdopodobieństwa zdarzeń $P(B_1) > 0$, $P(B_2) > 0$, $P(B_3) > 0$ są dodatnie.
Po trzecie alternatywa zdarzeń

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$

jest zdarzeniem pewnym.
Z treści tego przykładu mamy dla losowo wybranego dnia kwietnia prawdopodobieństwa pojawienia się typu pogody

- $P(B_1) = 0.2$
- $P(B_2) = 0.1$
- $P(B_3) = 0.7$

oraz prawdopodobieństwa warukowe

- $P(A/B_1) = 0.9$
- $P(A/B_2) = 0.8$
- $P(A/B_3) = 0.15$

Z tezy twerdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym obliczamy prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) \\ &= 0.2 * 0.9 + 0.1 * 0.8 + 0.7 * 0.15 = 0.445 \end{aligned}$$