SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 6.2: CECHY PODZIELNOŚCI

15 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

Contents

Chapter 1

Cechy podzielności liczb całkowitych.

W tym rozdziale rozpatrujemy cechy podzielności i operacje dzielenia liczb całkowitych .

1.1 Cechy podzielności liczb naturalnych

Cechy podzielności liczb naturalnych wynikają z ogólnego zapisu liczb w systemie pozycyjnym. Przypominamy, że w systemie dziesiętnym, każdą liczbę n-cyfrową piszemy w postaci

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0 \\ &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 + \alpha_0 * 10^0 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \cdots, \alpha_1, \alpha_0$$

są cyframi liczby m o wartościach $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Teraz sformułujemy i podamy prosty dowód cechy podzielności liczby naturalnej przez 3

1.1.1 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 3 lub przez 9

Liczba naturalna

$$m = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1\alpha_0$$

jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr

$$\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0$$

dzieli się przez 3. Ponadto, jeżeli suma cyfr liczby m dzieli się przez 9 to liczba m również jest podzielna przez 9.
Zanim podamy dowód tej cechy, rozpatrzmy kilka przykładów jej zastosowania.

1.1.2 Przykłady

Przykład 1.1 *Niech* $m = 24$. *Cyfry tej liczby dwucyfrowej, gdy* $n = 2$, *to* $\alpha_1 = 2$ *i* $\alpha_0 = 4$
Suma cyfr

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 2 + 4 = 6$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 24 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$24 : 3 = 8$$

Przykład 1.2 *Niech* $m = 381$. *Cyfry tej liczby trzycyfrowej, gdy* $n = 3$, *to* $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = 8$ *i* $\alpha_0 = 1$
Suma cyfr

$$\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 3 + 8 + 1 = 12$$

jest podzielna przez 3, *bo* $12 : 3 = 4$. *Zatem liczba* 381 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$381 : 3 = 127$$

Przykład 1.3 *Niech* $m = 5673$. *Cyfry tej liczby czterocyfrowej* $n = 4$, *to* $\alpha_3 = 5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 7$ *i* $\alpha_0 = 3$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 5 + 6 + 7 + 3 = 21$$

jest podzielna przez 3. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3. *Rzeczywiście*

$$5673 : 3 = 1891$$

Przykład 1.4 *Niech* $m = 48537$. *Cytry tej liczby pięciocyfrowej, gdy* $n = 5$, *to* $\alpha_4 = 4$, $\alpha_3 = 8$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7$ *i* $\alpha_0 = 7$
Suma cyfr

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 4 + 8 + 5 + 3 + 7 = 27$$

jest podzielna przez 3 *i przez* 9. *Zatem liczba* 5673 *jest podzielna przez* 3 *i przez* 9. *Rzeczywiście*

$$48537 : 3 = 16177, \quad i \quad 48537 : 9 = 5393$$

Dowód w przypadku liczb dwucyfrowych. Liczby dwucyfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned} \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_1 * (9 + 1) + \alpha_0 \\ &= 9 * \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

zawiera składnik $9 * \alpha_1$ z czynnikiem 9, zatem ten składnik jest podzielny przez 3 i przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym. W tym przykładzie jest to warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

Powtórzmy dowód cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 dla liczb trzycyfrowych.

Dowód w przypadku liczb trzycyfrowych. Liczby trzycfrowe piszemy w postaci

$$\alpha_2\alpha_1\alpha_0 = \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0$$

Proste przekształcenie wyrażenia algebraicznego

$$\begin{aligned} \alpha_2 * 100 + \alpha_1 * 10 + \alpha_0 &= \alpha_2 * (99 + 1) + \alpha_1 * (9 + 1) + \alpha_0 \\ &= 99 * \alpha_2 + 9 * \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

zawiera składnik $99 * \alpha_2 +\ 9 * \alpha_1$, który dzieli się przez 3 i przez 9. Zatem, jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ jest podzielna przez 3 lub przez 9 to liczba m jest również podzielna przez 3 lub przez 9.

Skąd wnioskujemy, że:

Jeżeli suma cyfr $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielny przez* 3 *lub* 9 *to liczba* m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Prawdą jest również zdanie odwrotne:

Jeżeli liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *to suma jej cyfr* $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *też jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Te dwa zdania wyrażamy jednym zdaniem:

Liczba m *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej suma cyfr* $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0$ *jest podzielna przez* 3 *lub przez* 9.

Ta relacja w obie strony nazywa się warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby m przez 3 lub przez 9.

W przypadku ogólnym dla liczb *n-cyfrowych*, schemat dowodu cechy podzielności liczby m przez 3 lub przez 9 jest taki sam jak dla liczb dwucyfrowych i trzycyfrowych.

Zadanie 1.1 *Wiadomo, że liczba naturalna* m *jest podzielna przez* 3 *i ma dokładnie* 4 *dzielniki, których suma równa jest* 128. *Znajdź tą liczbę.*

1.1.3 Cecha podzielności liczby naturalnej przez 5

Bardzo łatwo rozpoznać liczbę m, która jest podzielna przez 5. Mianowicie, zachodzi następujące cecha podzielności:

Liczba naturalna m *jest podzielna przez* 5 *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jej cyfry jedności są* 0 *lub* 5.

Przykład 1.5 *Łatwo sprawdzamy, że liczby*

$$30, 35, 40, 45, 150, 155, 2360, 2365, 9800, 9855, 9890, 9995$$

są podzielne przez 5

Dowód cechy podzielności liczby m przez 5.

Dla uproszczenia , rozpatrzymy liczbę trzycyfrową m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5. Wtedy liczba m rozkłada się na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalą. Mianowicie, mamy

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} m &= \alpha_2 * 10^2 + \alpha_1 * 10 + 5 \\ &= 5 * (2 * \alpha_2 * 10 + 2 * \alpha_1 + 1) \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym liczb n-cyfrowych, które mają cyfrę jedności 0 lub 5 mamy również rozkład liczby m na iloczyn liczby 5 przez liczbę naturalną. Mianowicie

$$\begin{aligned} m &= \alpha_{n-1} * 10^{n-1} + \alpha_{n-2} * 10^{n-2} + \cdots + \alpha_1 * 10^1 \\ &= 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_1) \end{aligned}$$

lub

$$m = 5 * (2 * \alpha_{n-1} * 10^{n-2} + 2 * \alpha_{n-2} * 10^{n-3} + \cdots + 2 * \alpha_2 + \alpha_1)$$

Zatem w przypadku ogólnym liczba m, która ma cyfrę jedności 0 lub 5 jest podzielna przez 5.

1.2 Dzielenie liczb przez 3 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 3 lub dzieli się przez 3 z resztą 1 lub z resztą 2.

Wtedy piszemy

$m = 3k$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 3

$m = 3k + 1$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 3, *reszta* 1

$m = 3k + 2$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 3, *reszta* 2

Przykład 1.6 *Wykonaj dzielenie z resztą*

- $33 : 3 = 11$ *reszta* 0
- $34 : 3 = 11$ *reszta* 1
- $35 : 3 = 11$ *reszta* 2

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{33}{3} = 11$ *reszta* 0
- $\frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3}$ *reszta* 1
- $\frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3}$ *reszta* 2

Przykład 1.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 36. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3

$$3k-3,\ 3k,\ \ 3k+3$$

Suma tych liczb

$$(3k-3)+3k+(3k+3)=9k=36$$

Skąd obliczamy

$$9k=36, \qquad k=36:9 \qquad k=4.$$

Odpowiedź:

$$3k-3=3*4-3=9,$$

$$3k=3*4=12,$$

$$3k+3=3*4+1=15$$

Kolejnymi liczbami podzielnymi przez 3, których suma równa jest 36 są liczby

$$9, \qquad 12 \qquad 15$$

Sprawdzenie:

$$9+12+15=36$$

Zadanie 1.2 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *równa jest* 72. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.3 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 1 *jest równa* 75. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.4 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 3 *z resztą* 2 *jest równa* 105. *Jakie to liczby?*

1.3 Dzielenie liczb przez 5 z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez 5 lub dzieli się przez 5 z resztą 1 lub resztą 2 lub z resztą 3 lub z resztą 4.

Wtedy piszemy

$m = 5k \quad$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 5

$m = 5k + 1 \quad$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 5, *reszta* 1

$m = 5k + 2 \quad$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 5, *reszta* 2

$m = 5k + 3 \quad$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 5, *reszta* 3

$m = 5k + 4 \quad$ *gdy liczba* m *jest podzielna przez* 5, *reszta* 4

Przykład 1.8 *Wykonaj dzielenie przez* 5 *z resztą*

- $35 : 5 = 7$ *reszta* 0
- $36 : 5 = 7$ *reszta* 1
- $37 : 5 = 7$ *reszta* 2
- $38 : 5 = 7$ *reszta* 3
- $39 : 5 = 7$ *reszta* 4

lub piszemy dzielenie w postaci ułamków

- $\frac{35}{5} = 7$ *reszta* 0
- $\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5}$ *reszta* 1
- $\frac{37}{5} = 7 + \frac{2}{5}$ *reszta* 2
- $\frac{38}{5} = 7 + \frac{2}{5}$ *reszta* 3

- $\frac{39}{5} = 7 + \frac{2}{5} \quad reszta \quad 4$

Przykład 1.9 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *równa jest* 45. *Jakie to liczby?*

Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3
Rozwiązanie.

$$5k-5,\ 5k,\ \ 5k+5$$

Suma tych liczb

$$(5k-5)+5k+(5k+5)=15k=45$$

Skąd obliczamy k

$$15k=45, \qquad k=45:15 \qquad k=3.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 45

$$5k-5=5*3-5=10,$$

$$5k=5*3=15,$$

$$5k+5=5*3+5=20$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$10, \qquad 15 \qquad 20$$

Sprawdzenie:

$$10+15+20=45$$

Zadanie 1.5 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 1 *równa jest* 108. *Jakie to liczby?*

Rozwiązanie.
Napiszmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5 z resztą 1

$$5k+1,\ 5k+6,\ \ 5k+11$$

Suma tych liczb

$$(5k+1)+(5k+6)+(5k+11)=15k+18=108$$

Skąd obliczamy k

$$15k=90, \qquad k=90:15 \qquad k=6.$$

Skąd obliczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 5, których suma równa jest 108

$$5k+1=5=5*6+1+31,$$

$$5k+6=5*6+6=36,$$

$$5k+11=5*6+11=41$$

Kolejnymi liczbami podzelnymi przez 5, których suma równa jest 45 są liczby

$$31, \qquad 36 \qquad 41$$

Sprawdzenie:

$$31+36+41=108$$

Zadanie 1.6 *Suma dwóch kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 2 *jest równa* 79. *Jakie to liczby?*

Zadanie 1.7 *Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez* 5 *z resztą* 3 *jest równa* 129. *Jakie to liczby?*

1.3.1 Ogólna zasada podzielności liczb naturalnych z resztą

Każda liczba naturalna m dzieli się przez liczbę naturalną n z resztą r. W wyniku dzielenia otrzymujemy całość k i resztę r.[1]
Wtedy piszemy

$$m:n=k+r:n \quad \textit{lub} \quad \frac{m}{n}=k+\frac{r}{n} \quad \textit{lub} \quad m=k*n+r$$

gdzie reszta $r=0,1,2,...,n-1$.
Z operacją dzielenia liczb z resztą łączymy funkcje całość z dzielenia liczby m przez liczbę n.

[1] Wartość funkcji całość z ułamka x, piszemy $E[x]\leq x$ lub $[x]\leq x$, równa jest największej liczbie całokowitej nie większej od x. Po angielsku Entire of x

• Funkcje całość z dzielenia, piszemy $E[m:n]$ lub $[m:n]$.

Wartość funkcji całość z $E[m:n]$ jest równa największej liczbie całkowitej nie większej od $m:n$.

Zatem

$$E[m:n] \leq m:n \qquad lub \qquad [m:n] \leq m:n.$$

Na przykład niech $m = 37, \quad n = 5.$

Największa liczba całkowita z tego dzielenia, ale nie większa od

$$37:5 = 7\frac{2}{5}$$

jest równa 7, piszemy

$$E[37:5] = E[\frac{37}{5}] = 7 \qquad lub \qquad [37:5] = [\frac{37}{5}] = 7.$$

Przykład 1.10 *Oblicz całość i resztę z dzielenia liczb* $m = 36,\ 37,\ 38,\ 39\ 40,\ 41$ *przez* $n = 6$.
Podaj wzór ogólny dzielenia liczby m *przez* 6 *z resztą* r.

Rozwiązanie:

$36:6 = 6,\ \ liczba\ 36\ jest\ podzielna\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 0,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 0.$

$37:6 = 6,\ \ liczba\ 37\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 1,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 1,$

$38:6 = 6,\ \ liczba\ 38\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 2,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 2,$

$39:6 = 6,\ \ liczba\ 37\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 3,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 3,$

$40:6 = 6,\ \ liczba\ 40\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 4,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 4,$

$41:6 = 6,\ \ liczba\ 31\ dzieli\ sie\ przez\ 6,\ \ z\ reszta\ 5,\ \ calosc\ k = 6,\ r = 5,$

Wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej m przez 6

$$m = 6k + r, \quad z \quad reszta \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Zadanie 1.8 *Stosując wzór ogólny dzielenia liczby naturalnej* m *przez* 6 *wykaż, że każda liczba pierwsza* $p > 3$ *dzieli się przez* 6 *z resztą* 1 *lub z resztą* 5 *i wtedy można napisać liczbę* p *w postaci*

$$p = 6 * k + 1, \quad lub \;\; p = 6k - 1 \;\; dla \;\; pewnej\ liczby\ naturalnej\ k$$

Napisz liczbę pierwszą $p = 7901$ *w postaci* $p = 6k - 1$