

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

LEKCJA 15.1,

Kombinatoryka. Permutacje wariacje i kombinacje

5 godziny lekcyjne po 45 minut

Tadeusz STYŚ

Contents

1	Kombinatoryka	3
1.1	Silnia liczby naturalnej $n!$	3
1.1.1	Przykłady	3
1.1.2	Zadania	4
1.2	Permutacje	4
1.2.1	Określenie permutacji	4
1.2.2	Przykłady	4
1.2.3	Zadania	5
1.3	Wariacje	5
1.3.1	Wariacje z powtórzeniami	5
1.3.2	Przykłady	6
1.3.3	Zadania	6
1.3.4	Wariacje bez powtórzeń	7
1.3.5	Przykłady	7
1.3.6	Zadania	8
1.4	Kombinacje	8
1.4.1	Określenie kombinacji	8
1.4.2	Przykłady	8
1.4.3	Zadania	10

Chapter 1

Kombinatoryka

Kombinatoryka obejmuje takie pojęcia jak silnia liczby naturalnej n , permutacje, wariacje bez powtórzeń i wariacje z powtórzeniami, kombinacje. Niżej podany jest opis tych pojęć z licznymi przykładami i ćwiczeniami.

1.1 Silnia liczby naturalnej $n!$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych aż do liczby n włącznie nazywamy silnią liczby n i oznaczmy symbolem $n!$. Zatem mamy

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n - 1) * n$$

Przyjmujemy że $0! = 1$

Wypiszmy kilka silni liczb naturalnych

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 1 * 2 = 2 \\ 3! &= 1 * 2 * 3 = 6 \\ 4! &= 1 * 2 * 3 * 4 = 24 \\ 5! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120 \\ 6! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \\ 7! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ (n - 1)! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * \dots * (n - 1) \\ n! &= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n - 1) * n \end{aligned}$$

1.1.1 Przykłady

Obliczanie silni wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{5! * 7!}{4! * 6!}$$

Rozwiązanie:

Latwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$5! = 4! * 5, \quad 7! = 6! * 7$$

$$\frac{5! * 7!}{4! * 6!} = \frac{4! * 5 * 6! * 7}{4! * 6!} = 5 * 7 = 42$$

Przykład 1.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{n!}{(n-1)!}$$

Rozwiązanie:

Latwo uprościmy ten ułamek pisząc

$$(n-1)! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1)$$

$$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1) * n$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1) * n}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * \dots * (n-1)} = n$$

1.1.2 Zadania

Zadanie 1.1 *Oblicz wartość ułamka*

$$\frac{3! * 5! * 7! * 9!}{2! * 4! * 6! * 8!}$$

Zadanie 1.2 *Uprość ułamek*

$$\frac{2n!}{(2n-3)!}$$

1.2 Permutacje**1.2.1 Określenie permutacji**

Permutacją elementów zbioru nazywamy ich ustawienie w pewnej kolejności. Dwie permutacje składające się z tych samych elementów są różne, jeżeli różnią się kolejnością elementów.

1.2.2 Przykłady

Na przykład:

Permutacje cyfr liczby dwucyfrowej 23 składają się z tych samych cyfr 2 i 3 tworzą dwie różne permutacje

$$23 \quad i \quad 32 \quad \text{ilosc permutacji} \quad 2! = 2$$

Zauważmy, że innych permutacji cyfr 2 i 3 nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 257

257 275
 527 572 ilość permutacji $3! = 6$
 725 752

Przykład 1.3 Wypisz wszystkie permutacje zbioru dwuelementowego ab

ab ba ilość permutacji $2! = 2$

Zauważmy, że innych permutacji liter a i b nie ma.

Podobnie wypiszmy wszystkie permutacje zbioru trzelementowego abc

abc acb
 bac bca ilość permutacji $3! = 6$
 cab cba

Ogólnie, ilość permutacji n -elementowego zbioru równa jest $n!$

1.2.3 Zadania

Zadanie 1.3 Wypisz wszystkie permutacje cyfr liczby trzycyfrowej 391

Zadanie 1.4 Wypisz wszystkie permutacje elementów zbioru czteroelementowego $ABCD$

1.3 Wariacje

Wariacją k -elementową ze zbioru n -elementowego ($n \geq k$) nazywamy ciąg k elementów wybranych ze zbioru n -elementowego. Ciąg k -elementowy jest wariacją z powtórzeniami, jeżeli w tym ciągu mogą powtarzać się elementy zbioru z którego tworzone są wariacje. Natomiast k -elementowa wariacja bez powtórzeń jest ciągiem w którym nie ma powtórzeń elementów zbioru n -elementowego. W wariacjach bez powtórzeń i w wariacjach z powtórzeniami kolejność elementów jest ważne, to znaczy dwie wariacje są różne, jeżeli składają się z tych samych elementów ale różnią się kolejnością elementów.

1.3.1 Wariacje z powtórzeniami.

Pojęcie wariacji bez powtórzeń lub z powtórzeniami dobrze ilustruje proces losowania ze zbioru n -elementowego, który zawiera tylko elementy różne.

Mianowicie, wariacje z powtórzeniami tworzymy w ten sposób, że wylosowany element wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnego elementu. Losujemy tak długo aż wylosujemy k -elementów. W ten sposób otrzymamy ciąg k -elementów w którym może być wylosowany ten sam element co najwyżej k -razy.

Podobnie tworzymy k -elementowe wariacje bez powtórzeń z tą różnicą, że wylosowanego elementu nie wrzucamy spowrotem do urny przed losowaniem następnych elementów. W ten sposób otrzymujemy k -elementową wariację w której wszystkie elementy są różne, to znaczy nie ma elementów powtórzonych.

Ilość możliwych k -elementowych wariacji z powtórzeniami utworzonych ze zbioru n -elementowego obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = n^k$$

1.3.2 Przykłady

Pojęcie wariacji z powtórzeniami i obliczanie ilości k-elementowych wariacji z powtórzeniami wybranymi ze zbioru n-elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.4 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy

11 12
21 22

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1 i 2 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_2^2 = 2^2 = 4$

Przykład 1.5 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

11 12 13
21 22 23
31 32 33

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^2 = 3^2 = 9$

Przykład 1.6 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3\}$.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe z powtórzeniami ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy liczby trzycyfrowe

111 122 113
121 122 123
131 132 133
211 212 213
221 122 123
231 132 233
311 312 313
321 322 323
331 332 333

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych utworzonych cyfra 1, 2, 3 to ilość wariacji z powtórzeniami $V_3^3 = 3^3 = 27$

1.3.3 Zadania

Zadanie 1.5 *Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.*

Zadanie 1.6 *Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe z powtórzeniami utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.*

Zadanie 1.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone ze zbioru cyfr $\{2, 5, 7, 9\}$.*

1.3.4 Wariacje bez powtórzeń

Wariacja k-elementowa bez powtórzeń to ciąg elementów różnych wybranych ze zbioru n-elementowego ($1 \leq k \leq n$).

Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego określona jest wzorem:

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) * (n-k+2) * \dots * (n-1) * n$$

lub pisząc iloczyn w odwrotnej kolejności jego czynników mamy wzór

$$W_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n * (n-1) * \dots * (n-k) * (n-k+1).$$

1.3.5 Przykłady

Pojęcie wariacji bez powtórzeń i obliczanie ilości k-elementowych wariacji bez powtórzeń wybranych ze zbioru n-elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.7 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr {1, 2}.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 2-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$12 \quad 21$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1 i 2 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przypadku równa jest ilości permutacji $W_2^2 = 2! = 2$

Przykład 1.8 *Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr {1, 2, 3}.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby dwucyfrowe to są wariacje 2-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby

$$\begin{array}{ll} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{array}$$

Odpowiedź: Ilość liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach utworzonych cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń

$$W_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Przykład 1.9 *Wypisz wszystkie liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr {1, 2, 3}.*

Rozwiązanie:

W tym przykładzie liczby trzycyfrowe to są wariacje 3-elementowe bez powtórzeń wybrane ze zbioru też 3-elementowego. Łatwo znajdujemy te liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach

123	132
213	231
312	321

Odpowiedź: Ilość liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3 to ilość wariacji bez powtórzeń. W tym przykładzie to jest ilość permutacji $W_3^3 = 3! = 6$

1.3.6 Zadania

Zadanie 1.8 Wypisz wszystkie wariacje 2-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.9 Wypisz wszystkie wariacje 3-elementowe bez powtórzeń utworzone ze zbioru 3-elementowego $\{a, b, c\}$.

Zadanie 1.10 Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone ze zbioru cyfr $\{2, 5, 7, 9\}$.

Zadanie 1.11 Wypisz wszystkie wariacje bez powtórzeń 2-elementowe wybrane ze zbioru 4-elementowego $\{a, b, c, d\}$.

1.4 Kombinacje**1.4.1 Określenie kombinacji**

Kombinacją k-elementową wybraną ze zbioru n-elementowego nazywamy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego. Zatem w kombinacji kolejność elementów nie jest ważna. To znaczy, że dwie kombinacje są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem.

Ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego obliczmy ze wzoru

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lub stosując symbol Newtona piszemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem ilość kombinacji k-elementowych wybranych ze zbioru n-elementowego równa jest ilości k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

1.4.2 Przykłady

Pojęcie kombinacji i obliczanie ilości k-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru n-elementowego ilustrujemy i wyjaśniamy na niżej podanych przykładach

Przykład 1.10 Ile można utworzyć par do gry w szachy w klasie liczącej 20 uczniów, żeby każdy uczeń grał tylko raz z każdym wybranym uczniem?

Rozwiązanie:

Ilość par utworzonych z 20 uczniów równa jest ilości kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego, gdyż dwie pary są różne tylko wtedy gdy różnią się co najmniej jednym elementem, czyli każda para jest 2-elementowym podzbiorem.

Każdy uczeń może dobrać partnera do gry w szachy na $20 - 1 = 19$ sposobów. Zatem ilość par różnych równa się $\frac{19 * 20}{2} = 190$.

Ilość kombinacji 2-elementowych ze zbioru 20-elementowego obliczamy również ze wzoru

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{19 * 20}{2} = 190$$

Przykład 1.11 W klasie jest 15 uczniów. Na ile sposobów można wybrać

(i) trzech przedstawicieli

(ii) czterech przedstawicieli

Rozwiązanie (i):

Dwie trójki są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym uczniem, kolejność wyboru uczniów do trójki jest nie ważna. Zatem pytanie jest ile można utworzyć 3-elementowych kombinacji ze zbioru 15-elementowego lub ile można utworzyć 3-elementowych podzbiorów ze zbioru 15-elementowego ?

Obliczamy ze wzoru:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 * 14 * 15}{6} = 13 * 7 * 5 = 455$$

Odpowiedź: Ilość możliwych przedstawicieli uczniów w grupach po 3 równa jest 455 trójek
Podobne jest rozwiązanie (ii)

Przykład 1.12 Ile jest możliwych wyników w grze "Duży Lotek", jeżeli wybieramy 6 liczby z 49 liczb ?

Rozwiązanie:

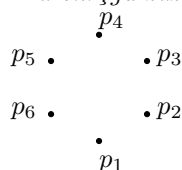
Ilość możliwych wyników równa jest ilości kombinacji 6-elementowych wybranych ze zbioru 49-elementowego.

Zatem obliczamy stosując wzór

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{43 * 44 * 45 * 46 * 47 * 48 * 49}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6} = 13983816$$

Odpowiedź: W "Dużym Lotku" ilość możliwych wyników równa jest 13983816

Przykład 1.13 Na okręgu zaznaczono sześć punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$



Wielokąty o wierzchołkach na okręgu

Ile można narysować różnych wielokątów w tym

(a) trójkątów

(b) czworokątów

(c) pięciokątów

(d) sześciokątów

o wierzchołkach na okręgu w punktach $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

Rozwiązanie:

Dwa wielokąty są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym wierzchołkiem. Podobnie dwie kombinacje są różne, jeżeli różnią się co najmniej jednym elementem.

Zatem ilość trójkątów równa jest ilości 3-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych trójkątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 1 * 2 * 3} = \frac{4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3} = 4 * 5 = 20.$$

Podobnie ilość czworokątów równa jest ilości 4-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych czworokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 1 * 2} = \frac{5 * 6}{1 * 2} = 15.$$

Ilość pięciokątów równa jest ilości 5-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych pięciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Ilość sześciokątów równa jest ilości 6-elementowych kombinacji wybranych ze zbioru 6-elementowego. Ilość możliwych sześciokątów o wierzchołkach na kręgu obliczamy stosując wzór

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6}{1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 0!} = 1, \quad \text{gdz} \quad 0! = 1.$$

1.4.3 Zadania

Zadanie 1.1 W klasie jest 20 uczniów. Na ile sposobów można wybrać

(i) trzech przedstawicieli

(ii) czterech przedstawicieli

Zadanie 1.2 Ile jest możliwych wyników w grze liczbowej, jeżeli wybieramy 5 liczb z 50 liczb?