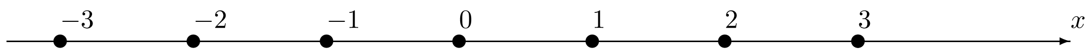
0.1 Lekcja 1. Liczby pierwsze

Liczba 2 jest jedyną liczbą najmniejszą parzystą i pierwszą



Oś liczbowa. Liczba 1 nie jest liczbą pierwszą

0.2 Wstęp

Jedną z najważniejszych operacji na liczbach jest rozkład dowolnej liczby naturalnej na czynniki liczb pierwszych. Rozkład liczb na czynniki pierwsze podajemy na podstawie fundamentalnego twierdzenia arytmetyki.
Bezpośrednią konsekwencją rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze jest wyznaczanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb naturalnych. Jednym z optymalnych algorytmów wyznaczania namniejszego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych jest *algorytm Euklidesa*.

0.3 Liczby pierwsze

Opis liczb pierwszych należy zacząć od definicji

Defimnicja 0.1 *Liczbę naturalną $p > 1$ nazywamy liczbą pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki, to jest liczbę 1 i samą siebie p. To znaczy ze liczby pierwsze dzielą się tylko przez liczbę 1 i przez siebie samą. Każda inna liczba nazywa się liczbą złożoną.*

Zauważmy, że liczba natyralna $p = 1$ nie jest liczbą pierwszą, gdyż ma tylko jeden dzielnik samą siebie i nie jest większa od 1. Liczba 0 również nie jest pierwsza bo jest mniejsza od 1 i ma więcej dzielników niż dwa, gdyż podzielona przez dowolną liczbę naturalną, różną od zera, daje wynik 0. Wymieńmy kilka kolejnych liczb pierwszych

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 59, 61...;$$

Z defincji wynika w sposób oczywisty, że liczba $p = 2$ jest jedyną liczbą pierwszą parzystą. Zbiór liczb pierwszych nie jest zamknięty na operację arytmetyczne. Wystarczy podać kontr-przykład.

Przykład 0.1 *Mianowicie liczby $m = 7$ i $n = 3$ są pierwsze jednak ich suma $m + n = 7 + 3 = 10$ nie jest liczbą pierwszą i różnica $7 - 3 = 4$ też nie jest liczbą pierwszą. Podobnie iloczyn tych liczb $m * n = 3 * 7 = 21$ nie jest liczbą pierwszą.*

Jedna z najważniejszych własności liczb pierwszych opisana jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 0.1 Fundamentalne Twierdzenie Arytmetyki. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych. Taki rozkład jest jedyny.*
Inaczej, jeżeli n jest liczbą naturalną to istnieją liczby pierwsze

$$p_1, p_2, p_3 \cdots, p_k$$

takie, że

$$n = p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_k$$

0.3.1 Rozkład liczb na czynniki pierwsze

Z fundamentalnego twierdzenia arytmetyki wiemy, że każda liczba naturalna dodatnia ma postać iloczynu liczb pierwszych. Inaczej, każda liczba naturalna dodatnia $m > 1$ rozkłada się na iloczyn liczb pierwszych. Co więcej taki rozkład jest jedyny. To znaczy, że nie ma innego rozkładu tej liczby naturalnej m na czynniki liczb pierwszych, oprócz czynników $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$.
Sposób rozkładu liczby naturalnej m na czynniki pierwsze jest prosty. Mianowicie, dzielimy liczbę m przez kolejne liczby pierwsze. Wtedy liczba m równa się iloczynowi jej dzielników.

Przykład 0.2 *Rozłóż liczbę $m = 1638$ na czynniki pierwsze.*

posłużymy się schematem

$$\begin{array}{l|l} 1638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba 1638 rozkłada się na czynniki $2, 3, 3, 7, 13$
To znaczy

$$1638 = 2 * 3 * 3 * 7 * 13$$

Przykład 0.3 *Rozłóż liczbę m=5040 na czynniki pierwsze. posłużymy się schematem*

$$\begin{array}{l|l} 5040 & 2 \\ 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba $m = 5040$ rozkłada się na czynniki $2, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 7$, To znaczy

$$5040 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 * 5 * 3 * 7.$$

Zauważmy, że siedem silnia równa się

$$7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$$

W tym rozkładzie mamy liczby złożone

$$4 = 2 * 2 \qquad i \qquad 6 = 2 * 3$$

.

0.3.2 Zadania

Zadanie 0.1 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 14*. Znajdź liczbę m.*

Zadanie 0.2 *Wiadomo, że liczba naturalna m jest podzielna przez* 5 *i rozkłada się na* 3 *czynniki pierwsze, których suma równa jest* 19*. Znajdź wszystkie wartości liczby m.*