KONKURS 2022

Zadanie 1 (pkt)

Czy suma wszystkich ułamków zwykłych właściwych o mianowniku 97 jest liczbą całkowitą? Wybierz odpowied T (tak) albo N (nie) i uzasadnienie A lub B, lub C

$\|T\|$		$\|A.\|$	*mianownik tych ulamkow jest liczba pierwsza,*
		$\|$	*a suma ich licznikow jest liczba zlozona.*
	poniewaz		
$\|N\|$		$\|B.\|$	*suma liczb* $1, 2, 3, , ..97$ *jest libzba naturalna*
		$\|C.\|$	*suma liczb* $1, 2, 3, ...96$ *jest wielokrotnoscia liczby* 97

Solution. Suma wszystkich ułamków właściwych o mienowniku 97

$$\frac{1+2+3+...+96}{97} = \frac{96*97}{2*97} = 48$$

jest liczb całkowitą równą 48
Odpowied: Tak (T)

Zadanie 2 (1 pkt)

Zegar ma dwie wskazówki: godzinową i minutową. W pewnym momencie wskazówki te pokrywają się. W której minucie mniejszy kąt między wskazówkami przestanie być ostry ?
A. w trzynastej **B.** W szesnastej **C.** w siedemnstej **D.** w osiemnastej

Rozwiązanie
Wzkazówka minut jest 12 razy szybsza od wskazówki godzinn. Kąt prsty między wskazówkami jest gdy rónica między waskazówkami wynisi 15 minut. Od pokrycia wskazówek do przekroczenia kąta prostego minie 15 minut. Oznaczmy czas przekroczenia 15 minut literą t. Zatem mamy równanie

$$t - \frac{t}{12} minut = 15 min$$

$$t - \frac{t}{12} = 15, ; \quad \frac{11t}{12} = 15, \quad t = \frac{12*15}{11} = 16,36\, min$$

To jest w 17-tej minucie

Zadadanie 3 (pkt 1)

Maciek brał udział w biegach na orintacje. Liczba uczestników, którzy uzyskali lepszy czas os niego, była trzy razy mniejsza niż liczba tych, którzy uzyskali gorszy wynik. Wybierz poprawną odpowied z pośród oznaczonych literami **A i B oraz C i D**

A 27 **B 25**
Przy tej liczbie zawodników Maciek uplasowałby się na miejscu
C. szóstym **D.** siódmym

Rozwiązanie.

Niech x oznacza liczbę zawodniów którzy przybiegli na metę przed Maćkiem. Wtedy liczba zawodników którzy przybiegli na metę po Maćku równa jest 3x zawodników.
Razem zawodników było

$$x + 3x + 1 = 4x + 1$$

Wybieramy odpowied B 25 i sprawdzamy że róownanie

$$4x + 1 = 25$$

ma rozwiązanie $x = 6$

$$4 * 6 + 1 = 25$$

Wybieram odpowied C szósty.

Zadanie 4 (1 Pkt)

Pole sześcianu i objętość wyrażają się tą samą liczbą Oceń prawdziwość podanych zadań. Wybierz **P** jeżeli zdanie jest prawdziiwe, albo **F**, jeżeli jest fałszywe.

Pole calkowite szescianu wynosi 96	$\|P\|$ $\|F\|$
Objetosc szescianu jest kwadratem liczby calkowitej	$\|P\|$ $\|F\|$

Rozwiązanie.

Oznaczmy literą a bok podstawy sześcianu. Powierzchnia całkowita S sześciany równa się

$$S = 6a^2 = 96$$

dla $a = 4$ bo $6 * 4^2 = 96$.
Objętość V sześcianu o boku $a = 4$ równa jest

$$V = a^3 = 4^3 = 64 = 8^2$$

jest kwadratem liczby 8.
Zatem wybieramy odpowied **P**.

Zadanie 5 (2 pkt)

W pewnym sklepie od poniedziałku do piątku maliny są sprzedawane w 400 gramowych opakowaniach. W sobotę za tą samą cenę maliny są sprzedawane w opakowaniach o 25% większych. Oblicz o ile procent maliny są tańsze w sobotę

Rozwiązanie.

Waga paczki malin w sobotę wrosła o 25% i waży

$$400g + 25\%400g = 400g + \frac{1}{4}400g = 500g$$

Waga paczki malin wzrosła w sobotę o $500g - 400g = 100g$.
Zatem za $100g$ nie zapłaciliśmy w sobotę co stanowi $\frac{1}{4}$ ceny w dni robocze. To jest 25% ceny w dni robocze..
Odpowied: W sobotę maliny są tańsze o 25%
Zadanie 6 (2 Pkt)
W ródośmiu różnych i dowolny liczb naturalnnychżadna nie jest podzielna prze 5. Natomiast różnica między największą i na najmniejszą liczbą wynisi 8. Udowodnij, że suma tych ośmiu liczb jest podzielna przez 5 i przez 8.

Dowód.
Rozpatrzmy osiem liczb

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$

uporządkowanych od najmniejszej a_1 do największej a_8.
Wszystkie liczby podzielne przez 5 i przez 8 różne od zera zawierają czynnik 5 i czynnik 8.
Zatem te liczby są wielokrotną liczby $5 * 8 = 40$ piszemy

$$5 * 8 * n = 40 * n, \qquad n = 1, 2, 3, ...;$$

lub

$$40,\ 80,\ 120\ 160,\ 200,\ 240,\ 280,\ 320,\ ...; \tag{1}$$

Z powyszego arytmetycznego ciągu liczb z różnią 40 wybieramy te wyrazy które spełniają warunek

$$a_8 - a_1 = 8 * n, \qquad n = 1, 2, 3, ...;$$

są to liczby $a_8 = 9$ i $a_1 = 1$.
Wtedy suma ośmiu liczb

$$suma_1 = 1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + 9 = 10 + \underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{2+3+4+6+7+8=30} = 40$$

dla

$$a_2 = 2,\ \ a_3 = 3,\ \ a_4 = 4,\ \ a_5 = 6,\ a_6 = 7,\ \ a_7 = 8$$

Skąd wynika, że tylko pierwszy wyraz ciągu (1) to jest $suma_1 = 40$ spełniania warunеki zadania 6,
Pozostałe wyrazy ciągu sum

$$80,\ 120\ 160,\ 200,\ 240,\ 280,\ 320,\ ...;$$

nie spełniają warunaku zadania 6

$$a_8 - a_1 = 8$$

natomiast spełniają warunek

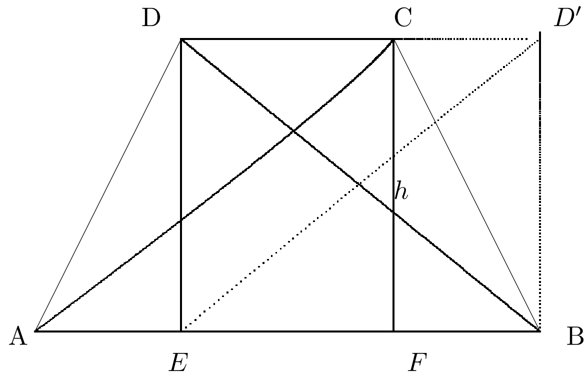
$$a_8 - a_1 = 8n \quad dla \quad n = 2, 3, 4...;$$

i są podzielne przez 5 i przez 8.
Koniec dowodu

Zadanie 7 (3 pkt)

Udowidnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości h, w którym przekątnne są prostopadłe,

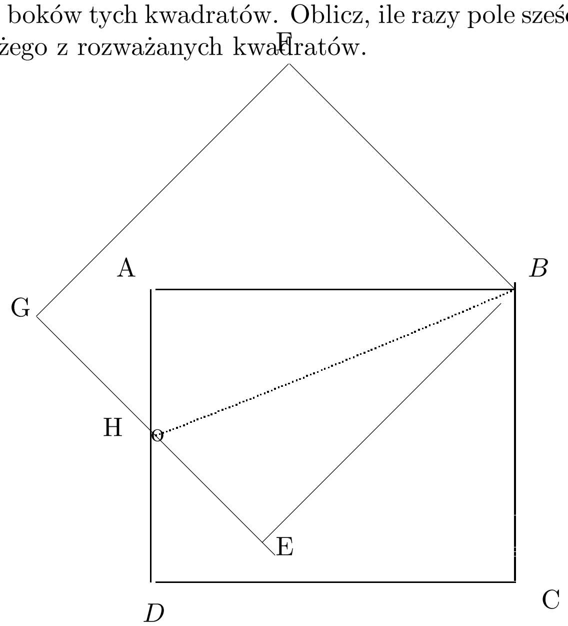
jestrówne polu kwadratu, którego bok ma długść równą wysokości tego kwadratu.
Rozwiązanie.
Rozpatrzmy trapez równoramienny, którego przekątne A, C i B, D przecinają się pod kątem prostym



Zauważmy, że trójkąty ΔAED i ΔFBC są przytające. Przenieśmy trójkąt ΔAED do pozycji w której wierzchołek A pokryje się z wierzchołkiem C, a wierzchołek D pokyje się z wierzchołkiem B. Następnie przesuńmy przekątną AC równolegle do pozycji ED'. Ponieważ przekątne prostokąta $EBD'D$ przecinają się pod kątem prostym to ten prostokąt musi być kwadratem o boku h.
W ten sposób otrzymamy kwadrat $EBD'D$, którego pole równe jest polu trapeza równoramiennego $ABCD$.

Koniec dowoduu.
Zadanie 8 (3 ptk)

Na rysunku boki kwadratów $ABCD$ i $BEGF$ są jednakowej długości, a punkt H jest środkiem odpowiednich boków tych kwadratów. Oblicz, ile razy pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów.



Rozwiązanie
Zauważmy że pole sześciokąta P_{BCDHGF} równe jest 2 razy pole kwadratu P_{ABCD} o boku a, odjąć pole czworokąta P_{ABEH}

Dwa pola kwadratu

$$2P_{ABCD} = 2a^2$$

Pola trójkąta prostokątnego

$$P_{ABH} = \frac{|AB| * |AH|}{2} = \frac{1}{2}\frac{a}{2} * a = \frac{a^2}{4}$$

Pola trójkąta prostokątnego

$$P_{BEH} = \frac{|HE| * |EB|}{2} = \frac{1}{2}\frac{a}{2} * a = \frac{a^2}{4}$$

Skąd obliczamy pole sześciokąta

$$P_{BCDHGF} = 2P_{ABCD} - (P_{ABH} + P_{BEH}) = 2 * a^2 - (\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}) = \frac{3}{2}a^2$$

Odpowiedź: Pole szściokąta $BCDHGF$ jest $\frac{3}{2}$ razy większe od polu każdego z tych kwadratów.

Zadanie 9 (3ptk)

Różnca dwóch liczb naturalnych jest równa 32, a ich iloraz wynosi 2 i reszty 6. Co to za liczby.
Odpowied uzasadnij.

Rozwiązanie

Różnica dwóch liczb naturalnych

$$m - n = 32$$

a iloraz

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{6}{n}$$

lub

$$m = 2n + 6$$

Ponieważ $m = 32 + n$ to n spełnia równanie liniowe

$$32 + n = 2n + 6$$

Skąd obliczamy $n = 26$ i $m = 32 + 26 = 58$
Sprwdzamy: różnica $m - n = 58 - 26 = 32$, oraz $\frac{m}{n} = \frac{58}{26} = 2 + \frac{6}{26}$

Zadanie 10 (3ptk)

Zosia skleiła wszystkie możliwe modele prostopadłościanów, których długości krawędzi są liczbami naturalnymi, natomiast jedna ze ścian każdego z tych prostopadłościanów ma pole równe 12, a druga 30. Ile modeli prostopadłościanów wykonała Zosia i jakie są ich objętości. Odpowied uzasadnij.

Rozwązanie

Oznaczmy krawędzie prostopadłościanów literami $m,\ n,\ p$
Każdy prostopadłościan ma 6 ścian, krórego ściany są prostokątami parami przystającymi
Zatema pola 3 sścian są odpowiednio równe

$$m * n = 12 = 2 * 6 = 3 * 4, \quad m * p = 30 = 5 * 6, \quad n * p = ?$$

Rozpatrzmy 4 możliwe warotości parametru m:

$$m = 2, \quad lub \quad m = 6, \quad lub \quad m = 4, \quad lub \quad m = 3.$$

Jeżeli $m = 2$ to

$$n = \frac{12}{2} = 6, \quad p = \frac{30}{6} = 5$$

Pierwszy prostopadłościan ma wymiry

$$2\ x\ 6\ x\ 5$$

i objętość

$$V = 2 * 6 * 5 = 60$$

Jeżeli $m = 6$ to

$$n = \frac{12}{6} = 2, \quad p = \frac{30}{2} = 15$$

Drugi prostopadłościan ma wymiry $6\ x\ 2\ x\ 15$ i objętość

$$V = 6 * 2 * 15 = 180$$

Jeżeli $m = 4$ to

$$n = \frac{12}{4} = 3, \quad p = \frac{30}{3} = 10$$

Trzeci prostopadłościan ma wymiry $4\ x\ 3\ x\ 10$ i objętość

$$V = 4 * 3 * 10 = 120$$

Jeżeli $m = 3$ to

$$n = \frac{12}{3} = 4, \quad p = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

W tym przypadku prostopadłościan nie ma trzech krawędzi o wymiarach liczb całkowitych.
Odpowied: Istnieją 3 różne prostopadłościany, których krawędzie są liczbami naturalnymi.
Ich objętości równe są odpowiednio $60,\ 120.\ 180$

Tadeusz Styś