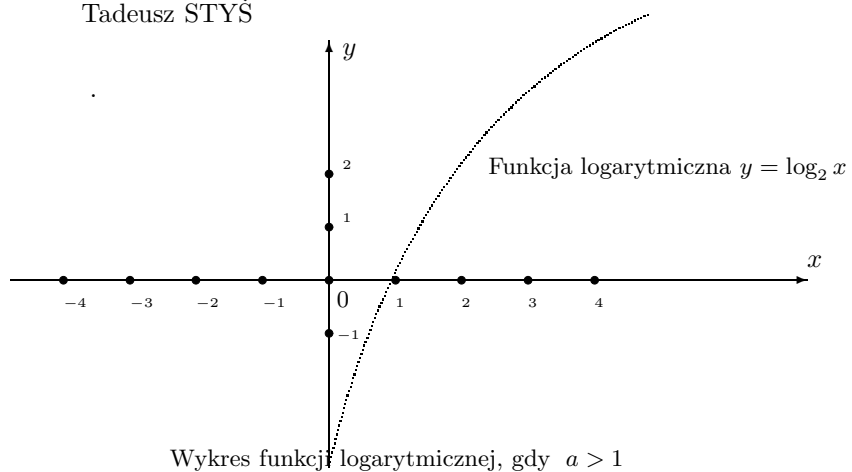


SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS  
02-892 WARSZAWA  
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 14.1: FUNKCJA LOGARYTMICZNA,

5 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŚ



# Contents

<b>1</b>	<b>Funkcja logarytmiczna</b>	<b>3</b>
1.1	Określenie funkcji logarytmicznej . . . . .	3
1.2	Logarytm naturalny . . . . .	4
1.2.1	Własności funkcji logarytmicznej . . . . .	4
1.3	Równania logarytmiczne . . . . .	8
1.3.1	Zadania . . . . .	10

# Chapter 1

## Funkcja logarytmiczna

### 1.1 Określenie funkcji logarytmicznej

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. To znaczy, jeżeli funkcja wykładnicza ustala zależność zmiennej  $y$  od zmiennej  $x$  wzorem

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

to funkcja odwrotna ustala zależność zmiennej  $x$  od zmiennej  $y$  wzorem

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

Wtedy stałą  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  lub  $0 < a < 1$  nazywamy podstawą logarytmu.

Zatem dziedziną funkcji logarymicznej jest zbiór wartości funkcji wykładniczej

$$D = \{y : 0 < y < \infty\}$$

natomiast zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest dziedzina funkcji wykładniczej

$$R = \{x : 0 < x < \infty\}$$

Na przykład logarytm dziesiętny, gdy  $a = 10$  piszemy

$$x = \log_{10} y, \quad \text{dla } y > 0$$

Logarytm dziesiętny jest związany z systemem liczbowym pozycyjnym dziesiętnym standardowym. Bez istotnej zmiany, możemy zamienić role zmiennych  $x$  i  $y$ . Mianowicie, zmienną niezależną oznaczamy literą  $x$ , natomiast zmienną zależną oznaczamy literą  $y$ , która zależy od  $x$ .

Logarytm dziesiętny, jako standardowy, oznaczamy symbolem

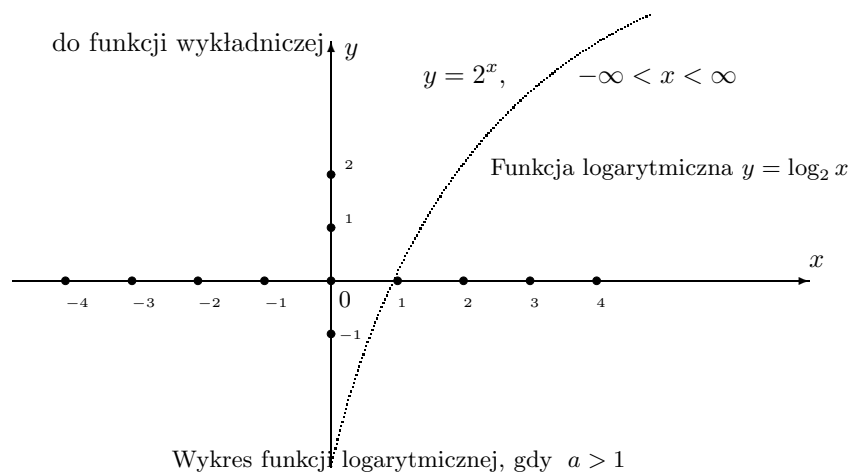
$$y = \log x, \quad x > 0,$$

bez pisania podstawy logarytmu 10.

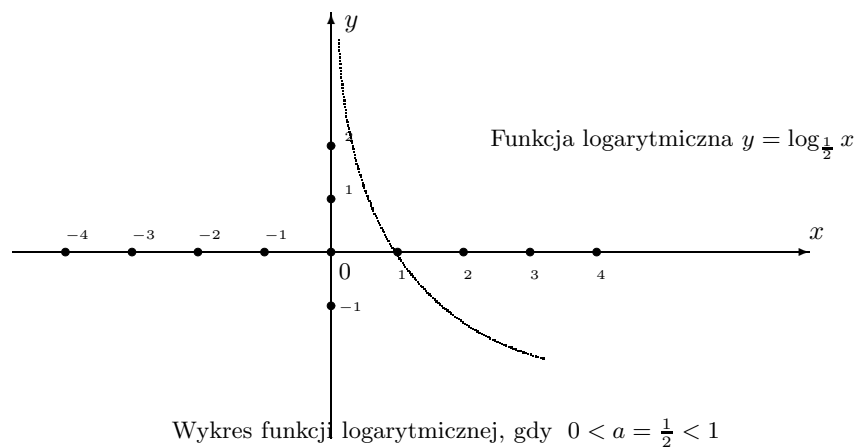
Funkcja logarytmiczna jest rosną dla podstawy większej od jedności  $a > 1$ , jest malejąca, jeżeli podstawa  $0 < a < 1$ .

Rozpatrzmy wykres funkcji odwrotnej

$$y = \log_2 x, \quad 0 < x < \infty$$



Wykres funkcji logarytmicznej malejąca dla podstawy logarytmu  $0 < a = \frac{1}{2}$ .



## 1.2 Logarytm naturalny

Logarytm naturalny jest odwrotną funkcją do funkcji potęgowej

$$y = e^x, \quad \text{lub} \quad y = \text{Exp}[x], \quad -\infty < x < \infty.$$

Tutaj podstawa

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\dots;$$

jest liczbą rzeczywistą o nieskończonej ilości cyfr.

### 1.2.1 Własności funkcji logarytmicznej

1. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(x) = \log_a x$$

dla  $x = 1$  równa jest zero.

$$g(1) = \log_a 1 = 0, \text{ ponieważ } a^0 = 1, a > 0, a \neq 1.$$

2. Wartość funkcji logarytmicznej

$$y = g(a) = \log_a a$$

dla  $x = a$  równa jest jeden.

$$g(a) = \log_a a = 1, \text{ ponieważ } a^1 = a, a > 0, a \neq 1.$$

3. funkcja logarytmiczna od iloczynu argumentów równa jest sumie wartości

$$\log_a x * t = \log_a x + \log_a t, x > 0, t > 0, a > 0, a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a x, g(x * t) = g(x) + g(t), x > 0, t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = \log_a x, \text{ to } x = a^{y_1}, a > 0, a \neq 1,$$

$$y_2 = \log_a t, \text{ to } t = a^{y_2}, a > 0, a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$x * t = a^{y_1} * a^{y_2} = a^{y_1 + y_2}, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a x * t = \log_a a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2 = \log_a x + \log_a t$$

4. funkcja logarytmiczna od ilorazu argumentów równa jest różnicy wartości

$$\log_a \frac{x}{t} = \log_a x - \log_a t, x > 0, t > 0, a > 0, a \neq 1.$$

W symbolach ogólnych tą własność piszemy

$$g(x) = \log_a x, g\left(\frac{x}{t}\right) = g(x) - g(t), x > 0, t > 0.$$

Istotnie sprawdzamy, że

$$y_1 = \log_a x, \text{ to } x = a^{y_1}, a > 0, a \neq 1,$$

$$y_2 = \log_a t, \text{ to } t = a^{y_2}, a > 0, a \neq 1.$$

Skąd znajdujemy

$$\frac{x}{t} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, a > 0, a \neq 1.$$

$$\log_a \frac{x}{t} = \log_a a^{y_1 - y_2} = y_1 - y_2 = \log_a x - \log_a t$$

5. funkcja logarytmiczna od argumentu  $x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; równa jest iloczynowi wykładnika potęgi  $k$  razy logarytm podstawy potęgi  $x$

$$\log_a x^k = k * \log_a x, \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

Własność ta bezpośrednio wynika z własności 2 o logarytmie z iloczynu. Mianowicie

$$\log_a x^k = \underbrace{\log_a x * x * \dots * x}_k = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_k = k * \log_a x$$

6. funkcja logarytmiczna od argumentu  $x^{\frac{m}{n}}$  równa jest logarytmowi

$$\log x^{\frac{m}{n}} = m * \log \sqrt[n]{x}$$

Mianowicie sprawdzamy korzystając z własności funkcji logarytmicznej i wykładniczej

$$\log_a x^{\frac{m}{n}} = \underbrace{\log_a \sqrt[n]{x} + \log_a \sqrt[n]{x} + \dots + \log_a \sqrt[n]{x}}_m = m * \log_a \sqrt[n]{x}.$$

7. Przy założeniach  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $c > 0$ ,  $c \neq 1$ ,  $b > 0$ , możemy zmienić podstawę  $a$  logarytmu  $\log_a b$  na podstawę  $c$  według wzoru

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dla sprawdzenia tego wzoru wprowadźmy oznaczenia

$$p = \log_a b, \quad q = \log_c b, \quad r = \log_c a$$

Z definicji logarytmu mamy

$$b = a^p, \quad b = c^q, \quad a = c^r$$

Skąd wynika równość

$$\begin{aligned} b &= (c^r)^p, & b &= c^{p*r}, \\ \log_c b &= p * r \log_c c, & \log_c c &= 1, \\ \log_c b &= p * r, & \log_c b &= \log_a b * \log_c a, \\ \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a}, \end{aligned}$$

8. W przypadku  $c = b$  zamiana podstawy z liczbą logarytmowaną  $b$  prowadzi do odwrotności logarytmu

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Rzeczywiście z własności 7, dla  $c = b$  mamy

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad \text{bo} \quad \log_b b = 1$$

**Przykład 1.1** Oblicz logarytm

$$(i) \log_2 64, \quad (ii) \log_5 125$$

Prosto z definicji logarytmu obliczamy

$$(i) \quad \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6, \quad \text{bo} \quad 2^6 = 64,$$

$$(ii) \quad \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \quad \text{bo} \quad 5^3 = 125.$$

**Przykład 1.2** Oblicz wartość wyrażenia logarytmicznych

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5},$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5),$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \frac{\log_3 625}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^4}{\log_3 5} = \frac{4 \log_3 5}{\log_3 5} = 4$$

$$(ii) \quad \frac{\log_8 5}{\log_2 5} = \frac{\log_2 5}{\log_2 8 \log_2 5} = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$$

$$(iii) \quad \log_2(\log_2 \sqrt{5}) - \log_2(\log_2 5) = \log_2 \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 5} = \frac{1}{2} * \frac{\log_2 \sqrt{5}}{\log_2 \sqrt{5}} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

**Przykład 1.3** Oblicz wartość wyrażenia logarytmicznych

$$(i) \quad \log_2(\log_4 16),$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125).$$

Korzystając z własności logarytmów, obliczamy

$$(i) \quad \log_2(\log_4 16) = \log_2 2 \log_4 4 = \log_2 2 = 1,$$

$$(ii) \quad \log_3(\log_5 125) = \log_3 \log_5 5^3 = \log_3 3 \log_5 5 = \log_3 3 = 1,$$

**Zadanie 1.1** Oblicz logarytm

$$(i) \quad \log_3 81, \quad (ii) \quad \log_7 16807$$

**Zadanie 1.2** Oblicz wartość wyrażenia logarytmicznych

$$(i) \quad \frac{\log_7 3125}{\log_7 5},$$

$$(ii) \quad \frac{\log_9 8}{\log_3 2},$$

$$(iii) \quad \log_3(\log_3 \sqrt{7}) - \log_3(\log_3 7),$$

**Zadanie 1.3** Oblicz wartość wyrażenia logarytmicznych

$$(i) \quad \log_5(\log_5 3125),$$

$$(ii) \quad \log_4(\log_3 6561).$$

### 1.3 Równania logarytmiczne

Równanie w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu nazywa się równaniem logarytmicznym. Rozwiązując równanie logarytmiczne w pierwszej kolejności należy określić dziedzinę równania. To jest ten zbiór argumentu  $x$  dla którego równanie logarytmiczne ma sense liczbowy. W dziedzinie równania logarytmicznego szukamy jego pierwiastka. Określenie dziedziny równania jest istotne, ponieważ rozwiązując równanie oryginalne przekształcamy to równania w równania o prostrzej strukturze, które mogą mieć pierwiastki spoza dziedziny równania oryginalnego, nazywane pierwiastkami obcymi. Metody rozwiązywania równań logarytmicznych oparte są na własnościach funkcji logarytmicznej i wykładniczej. Niżej na przykładach wyjaśniamy sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych.

**Przykład 1.4** *Rozwiąż równanie*

$$\log_2 x = 4$$

**Rozwiązanie:**

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu  $x$ . Zatem dziedziną tego równania jest zbiór  $x > 0$ . piszemy

$$0 < x < \infty \quad \text{lub} \quad x \in (0, \infty).$$

Z definicji logarytmu jako funkcji odwrotnej do funkcji wykładniczej wynika równość

$$x = 2^4 = 16.$$

Sprawdzamy, że rozwiązanie  $x = 16 \in (0, \infty)$  należy do dziedziny równania oraz

$$\log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4, \quad \log_2 2 = 1.$$

**Przykład 1.5** *Rozwiąż równanie*

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = 2$$

**Rozwiązanie:**

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$5 - x > 0 \quad \text{i} \quad 5 + x > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x < 5 \quad \text{lub} \quad x > -5.$$

Wtedy piszemy dziedzinę tego równania jako odcinek otwarty

$$-5 < x < 5 \quad \text{lub} \quad x \in (-5, 5).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(5 - x) + \log_3(5 + x) = \log_3(5 - x)(5 + x) = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(5 - x)(5 + x) = 3^2, \quad \text{lub} \quad 25 - x^2 = 9 \quad \text{lub} \quad x^2 = 16.$$



Obliczamy pierwiastki kwadratowe

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{16} = 4.$$

Skąd mamy dwa rozwiązania

$$\text{gdy } |x| = 4 \text{ to } x_1 = -4 \text{ lub } x_2 = 4.$$

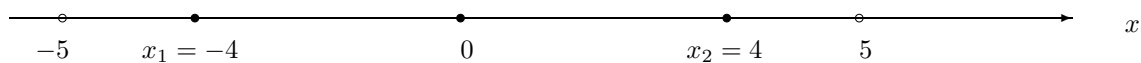
Sprawdzamy, że rozwiązanie  $x_1 = -4 \in (-5, 5)$  i  $x_2 = 4 \in (-5, 5)$  należy do dziedziny równania

$$\log_3(5 + 4) + \log_3(5 - 4) = \log_3 9 * 1 = \log_3 3^2 = 2$$

oraz

$$\log_3(5 - 4) + \log_3(5 + 4) = \log_3 1 * 9 = \log_3 3^2 = 2.$$

Zauważamy, że oba rozwiązania  $x_1 = -4 \in (-5, 5)$  i  $x_2 = 4 \in (-5, 5)$  należą do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbową. Dziedzina równania przedział otwarty  $(-5, 5)$

**Przykład 1.6** Rozwiąż równanie

$$\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4) = 1$$

**Rozwiązanie:**

Najpierw określamy dziedzinę równania logarytmicznego. Mianowicie, logarytm jest określony tylko dla dodatnich wartości argumentu

$$x - 2 > 0 \quad i \quad x - 4 > 0.$$

Zatem dziedziną tego równania jest zbiór

$$x > 2 \text{ lub } x > 4.$$

Wtedy piszemy dziedzinę tego równania jako odcinek nieskończony lewo stronnie otwarty

$$x > 4 \text{ lub } x \in (4, \infty).$$

Z własności sumy logarytmów wynika równość

$$\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4) = \log_3(x - 2)(x - 4) = 1.$$

Z definicji logarytmu mamy równość

$$(x - 2)(x - 4) = 3^1, \quad \text{lub } x^2 - 6x + 8 = 3 \text{ lub } x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Obliczamy pierwiastki równania:

Wyróżnik równania

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

o współczynnikach  $a = 1$ ,  $b = -6$ ,  $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4 * a * c = 6^2 - 4 * 1 * 5 = 36 - 20 = 16.$$

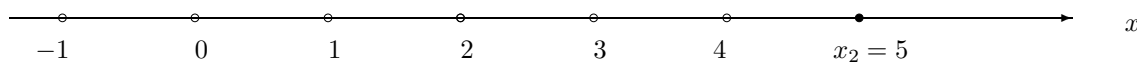
Skąd obliczamy pierwiastki równania

$$x_1 = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{16}) = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 + \sqrt{16}) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Sprawdzamy, że obcy pierwiastek  $x_1 = 1 \notin (4, \infty)$  nie należy do dziedziny równania, natomiast pierwiastek  $x_2 = 5 \in (4, \infty)$  należy do dziedziny równania. Zatem sprawdzamy, że drugi pierwiastek  $x_2 = 5$  spełnia równanie

$$\log_3(5-2) + \log_3(5-4) = \log_3 3 * 1 = \log_3 3 = 1$$

Zauważamy, że tylko pierwiastek  $x_2 = 5 \in (4, \infty)$  należy do dziedziny tego równania. Zaznaczmy dziedzinę i rozwiązanie na osi liczbowej



Oś liczbową. Dziedzina równania przedział otwarty  $(4, \infty)$

**Przykład 1.7** Rozwiąż równanie

$$\log_2(\log_4 x) = 1.$$

**Rozwiązanie:**

Dziedziną tego równania jest zbiór tych  $x$  dla których

$$\log_4 x > 1, \quad x > 4, \quad x \in (4, \infty)$$

Z definicji logarytmu wiemy, że jeżeli

$$\log_4 x = 2^1$$

to

$$x = 4^2, \quad x = 16.$$

Rozwiązanie  $x = 16 \in (4, \infty)$  należy do dziedziny.

Sprawdzamy, że  $x = 16$  spełnia równanie

$$\begin{aligned} \log_2(\log_4 16) &= \log_2(\log_4 4^2) \\ &= \log_2(2 \log_4 4) \\ &= \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

### 1.3.1 Zadania

**Zadanie 1.4** Podaj dziedzinę i znajdź rozwiązanie równania

$$\log_4 x = 3$$

**Zadanie 1.5** Podaj dziedzinę i znajdź rozwiązanie równania

$$\log_4(1-x) - \log_4(1+x) = 0.$$

**Zadanie 1.6** Rozwiąż równanie

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$$

**Zadanie 1.7** *Rozwiż równanie*

$$2 \log(x - 1) = 1$$

**Zadanie 1.8** *Rozwiż równanie*

$$\log_4(\log_8 x) = 1.$$