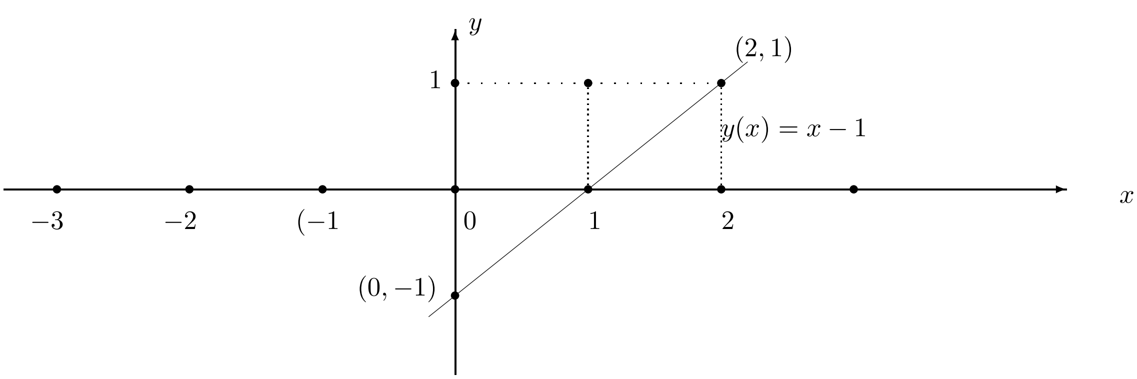
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10: FUNKCJA LINIOWA 10.1,

$$y = a * x + b, \qquad dla \quad a = 1, \;\; b = -1, \qquad y = x - 1$$




*Wykres funkcji liniowej* $y(x) = x - 1$*, w układzie współrzędnych* $x, y$

Tadeusz STYŠ

Warszawa czerwiec 2023

.

# Contents

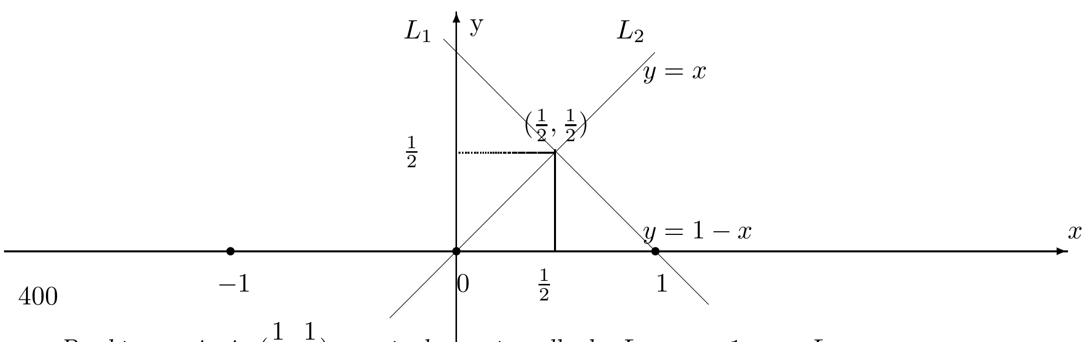

**1 Funkcje liniowe** **3**

1.1 Proste na płaszczyźnie . . . 3
1.2 Funkcja liniowa. . . . 3
1.3 Równania prostych równoległych . . . 7
1.3.1 Przykłady . . . 7
1.3.2 Zadania . . . 9
1.4 Równania prostych prostopadłych . . . 10
1.4.1 Przykłady . . . 10
1.4.2 Zadania . . . 11
1.5 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty . . . 13
1.5.1 Przykłady . . . 13
1.5.2 Zadania . . . 14
1.6 Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie . . . 16
1.6.1 Przykłady . . . 16
1.6.2 Zadania . . . 18
1.7 Proste równoległe. Równanie ogólne. . . . 20
1.7.1 Przykłady . . . 20
1.7.2 Zadania . . . 22
1.8 Proste prostopadłe. Równanie ogólne . . . 24
1.8.1 Przkłady . . . 24
1.8.2 Zadania . . . 26
1.9 Równanie parametryczne prostej . . . 26
1.9.1 Przykłady . . . 27
1.9.2 Zadania . . . 27

# Chapter 1

# Funkcje liniowe

## 1.1 Proste na płaszczyźnie




400

*Punkt przecięcia* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *prostych prostopadłych:* $L_1: \ y = 1 - x, \ L_2: \ y = x$

Położenie figur geometrycznych i ich kształt, w tym położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej są wyznaczane we współrzędnych $x, y$.
Proste na płaszczyźnie kartezjańskiej określamy przez równania liniowe, które ustalają zależność współrzędnej $y$ od współrzędnej $x$ punktów leżących na prostych.
Rozpatrzymy następujące cztery formy równań prostych:
• Równanie prostej w postaci funkcji liniowej
• Równanie prostej przechodzęj przez dwa punkty
• Równanie ogólne prostej.
• Równanie parametryczne prostej

## 1.2 Funkcja liniowa.

*Zależność liniową*

$$y(x) = a\,x + b, \tag{1.1}$$

*współrzęnej $y$ od współrzędnej $x$ nazywamy funkcją liniową o współczynnikach $a$ i $b$ oraz zmiennej $x$.*
*Funkcją $y(x) = a\ x + b$ jest liniowa, gdyż jej wykresem jest linia prosta o współczynniku kierunkowym $a$ i wyrazie wolnym $b$.*
Równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

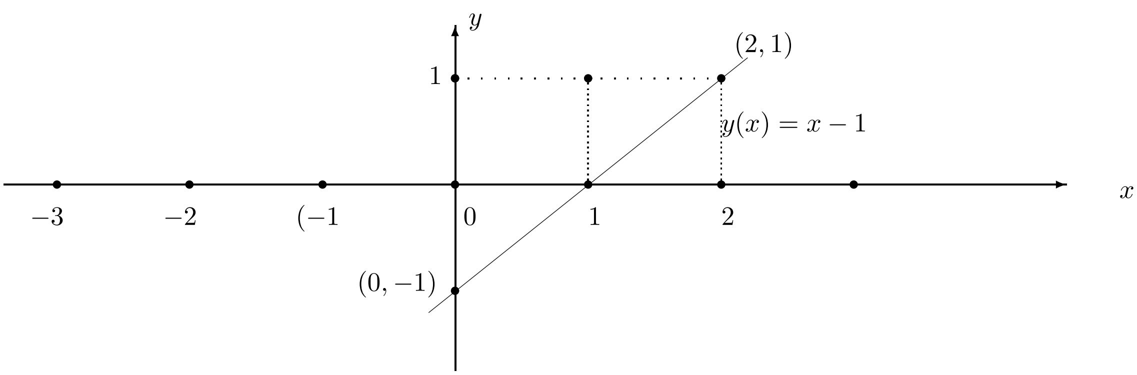
nie obejmuje prostych równoległych do osi $y$.

**Przykład 1.1** .
$(i)$ *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych* $x, y$, *przechodzącą przez dwa punkty* $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$
$(ii)$ *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

*przechodzącej przez punkty* $(0, -1)$ *i* $(2, 1)$

**Rozwiązanie** $(i)$




*Wykres funkcji liniowej* $y(x) = x - 1$, *w układzie wspołrzędnych* $x, y$

**Rozwiązanie** $(ii)$
Wykres funkcji $y(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(0, -1)$, $(2, 1)$, jeżeli

$$y(0) = -1, \quad y(2) = 1.$$

Wtedy współrzędne tych punktów spełniają równania

$$y(0) = a * 0 + b = -1, \quad b = -1,$$

$$y(2) = a * 2 + b = 1, \quad a * 2 - 1 = 1,$$

$$2 * a = 2, \quad a = 1$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$y(x) = x - 1$$

w formie funkcji liniowej o współczynnikach $a = 1$, $b = -1$, na której leżą dane punkty $(0, -1)$ i $(2, 1)$.

**Przykład 1.2** .
$(i)$ *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = (1, 1),$$

$$P_3 = (0, 1), \qquad P_4 = (1, 0)$$

*leżą na prostych $L_1$ lub $L_2$ o równaniach*

$$L_1: \quad y_1(x) = x, \qquad L_2: \quad y_2(x) = 1 - x. \tag{1.2}$$

*(ii) Znajdź punkt przecięcia prostych $L_1$, $L_2$. Podaj wykres tych prostych.*

**Rozwiązanie** $(i)$. Punkty $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,1)$ leżą na prostej $L_1$, ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_1: \ y = x$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Punkty $P_3 = (0,1)$, $P_2 = (1,0)$ leżą na prostej $L_2$ ponieważ ich współrzędne spełniają równanie prostej $L_2: \ y = 1 - x$,

$$y(0) = 1 - 0 = 1, \quad y(1) = 1 - 1 = 0.$$

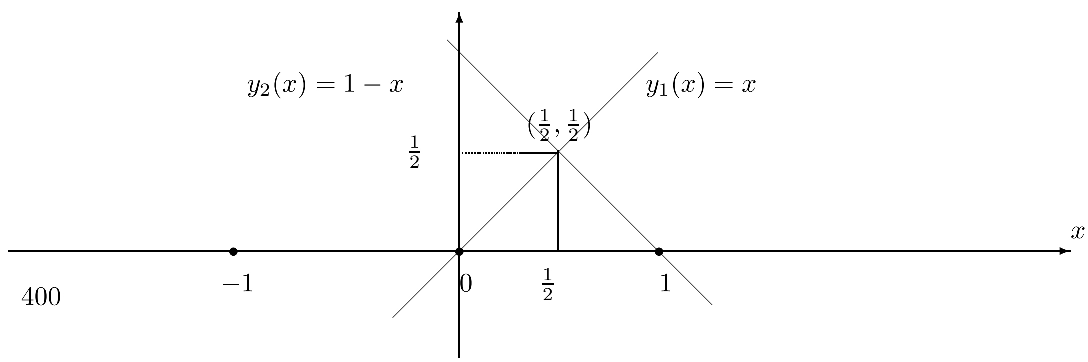
**Rozwiązanie** $(ii)$.
Punkt przecięcia $(x_0, y_0)$ leży na obu prostych, jeżeli

$$y_1(x_0) = y_0, \quad i \quad y_2(x_0) = y_0.$$

Wtedy mamy równania

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = x_0 = y_0 \quad && i \quad y_2(x_0) = 1 - x_0 = y_0, \\ &x_0 = 1 - x_0 && i \quad 2x_0 = 1, \\ &x_0 = \frac{1}{2} && i \quad y_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Proste $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = 1 - x$ przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$




*Punkt przeciecia prostych prostopadlych* $: \ y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1 - x.$

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.2: RÓWNANIA PROSTYCH RÓWNOLEGŁEGŁYCH,

10 godzin lekcyjnych

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.3 Równania prostych równoległych

Rozpatrzmy dwie proste $L_1$ i $L_2$ o równaniach [1]

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2x + b_2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

**Warunek konieczny i dostateczny.**
*Proste $L_1$ i $L_2$ o równananiach (1.3) są równoległe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki $a_1$, $a_2$ są równe $a_1 = a_2$*

### 1.3.1 Przykłady

**Przykład 1.3** *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x + 1, \\ L_2: &\quad y = x - 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej $L_1$ i $L_2$.*

**Rozwiązanie.**
Proste $L_1$ i $L_2$ o współczynnikach

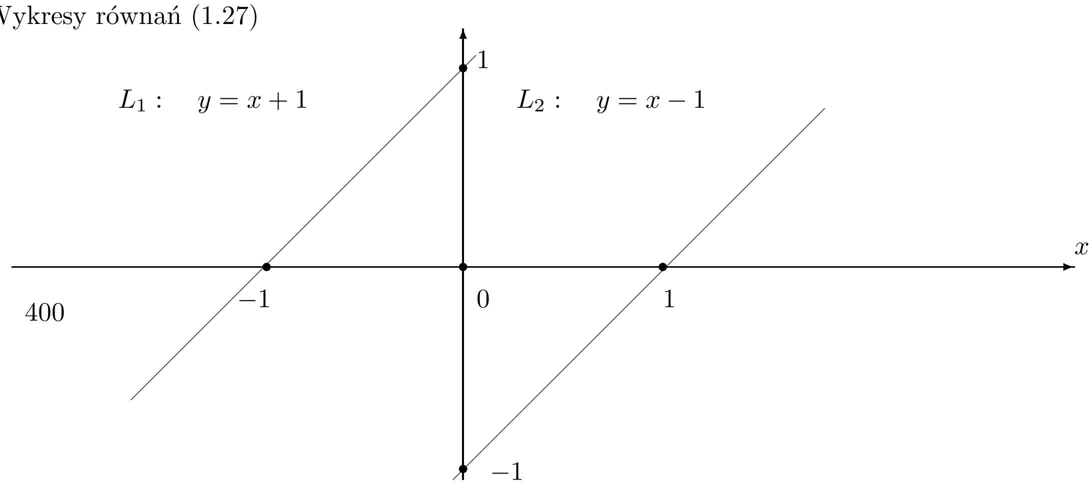
$$\begin{aligned} a_1 = 1, &\quad b_1 = 1, \\ a_2 = 1, &\quad b_2 = -1 \end{aligned}$$

są równoległe ponieważ ich współczynniki $a_1, a_2$ spełją warunek konieczny i dostateczny równoległości prostych na płaszczyźnie.

$$a_1 = a_2 = 1.$$

[1] Dalej używamy uproszconych oznaczeń $y$ zamiast $y(x)$

Wykresy równań (1.27)




**Przykład 1.4** *Wyznacz równanie prostej $L$ równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = x+1$$

*przechodzącej przez punkt*

$$P = (3,1).$$

*Podaj wykres prostej $L_0$ i prostej $L$.*

**Rozwiązanie.**
Prosta $L$ równoległa do prostej $L_0$ ma współczynnik kierunkowy ten sam co prosta $L_0$, mianowicie $a = 1$.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = x+b.$$

Ponieważ prosta $L$ przechodzi przez punkt $P = (3,1)$ to po podstawieniu współrzędnych punktku otrzymamy równanie

$$1 = 3+b,$$

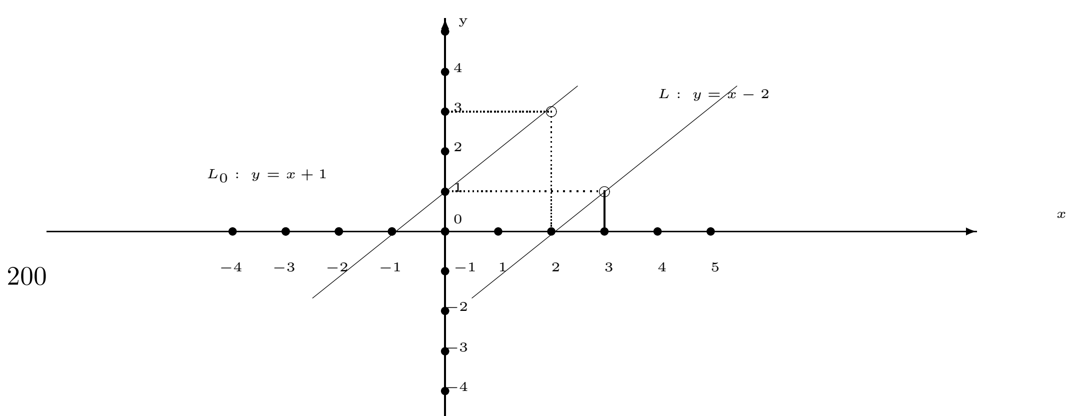
z którego obliczamy wyraz wolny

$$b = 1-3 = -2.$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = x-2.$$

Wykres prostych równoległych $L_0: \ y = x+1, \quad L: \ y = x-2$



### 1.3.2 Zadania

**Przykład 1.5** *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x + 1, \\ L_2: &\quad y = x - 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej $L_1$ i $L_2$.*

**Przykład 1.6** *Wyznacz równanie prostej $L$ równoległej do prostej*

$$L_0: \quad y = x - 1$$

*przechodzącej przez punkt*

$$P = (1, 0).$$

*Podaj wykres prostej $L_0$ i prostej $L$.*

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.3: Równania prostych prostopadłych,

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.4 Równania prostych prostopadłych

Rozpatrzmy dwie proste $L_1$ i $L_2$ o równaniach

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = a_1x + b_1, \\ L_2: &\quad y = a_2x + b_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

**Warunek konieczny i dostateczny.**
*Prosta $L_1$ jest prostpadła do prostej $L_2$, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynnik $a_2$ prostej $L_2$ równy jest negatywnej odwrotności współczynnika $a_1$ prostej $L_1$*

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

*Wtedy każda prosta o równaniu*

$$y = -\frac{1}{a_1}x + b \tag{1.7}$$

*jest prostopadała do prostej $L_1$ dla dowolnej wartości wyrazu wolnego $b$.*

### 1.4.1 Przykłady

**Przykład 1.7** *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad y = x - 1, \\ L_2: &\quad y = 1 - x \end{aligned} \tag{1.8}$$

*są prostopadłe.*
*Podaj wykresy prostej $L_1$ i $L_2$.*

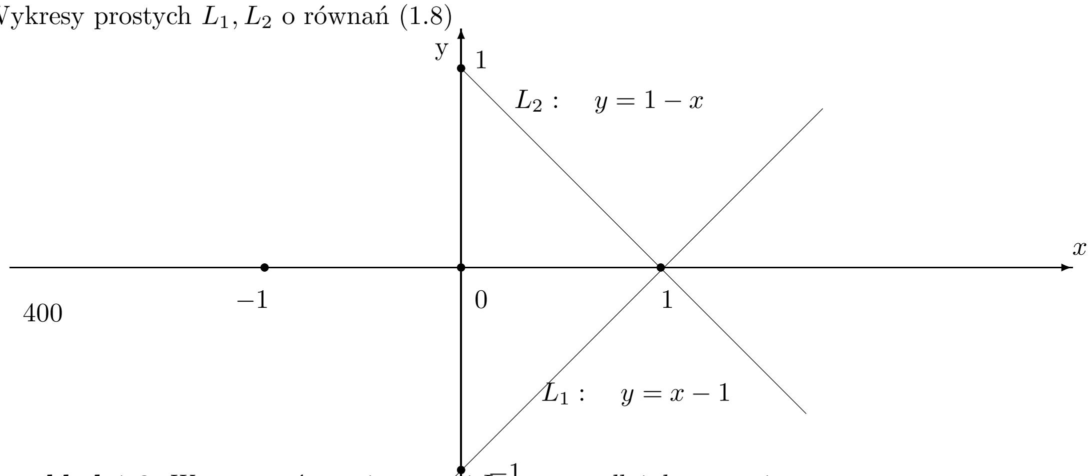
**Rozwiązanie.**
Proste $L_1$ i $L_2$ o współczynnikach

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= 1, \\ a_2 &= -1, & b_2 &= 1 \end{aligned}$$

są prostopadłe ponieważ ich współczynniki $a_1, a_2$ spełniają warunek konieczny i dostateczny (1.7) prostopadłości prostych na płaszczyźnie.

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} = -\frac{(1)}{1} = -1.$$

Wykresy prostych $L_1, L_2$ o równań (1.8)




**Przykład 1.8** *Wyznacz równanie prostej $L$ prostopadłej do prostej*

$$L_0: \quad y = x + 2$$

*przechodzącej przez punkt*

$$P = (2, -2).$$

*Podaj wykres prostej $L_0$ i prostej $L$.*

**Rozwiązanie.**
Prosta $L$ prostopadła do prostej $L_0$ ma współczynnik kierunkowy równy negatywnej odwrotności współczynnika $a = 1$ prostej $L_0$.
Wtedy równanie prostej

$$L: \quad y = -\frac{1}{(1)}x + b = b - x.$$

Ponieważ prosta $L$ przechodzi przez punkt $P = (2, 0)$ to współrzędne tego punktu spełniają równanie

$$0 = 2 + b$$

z którego obliczmay wyraz wolny

$$b = 2$$

Skąd otrzymujemy równanie prostej

$$L: \quad y = 2 - x$$

### 1.4.2 Zadania

**Zadanie 1.1** *Podaj wykres prostej prostopadłej $L_0$ o równaniu $y = x + 2$ do prostej $L$ o równaniu $y = x - 2$.*

**Zadanie 1.2** *Sprawd czy proste są prostopadłe*

$$(i) \quad y = x \qquad i; \quad y = -x(ii) \quad y = x - 1 \quad i \quad y = x + 1$$

ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.4: Równanie prostej przechodzącej przez dwa punktu ,

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.5 Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

[2] Równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty nie obejmuje prostych prostopadłych do osi $x$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty o współrzędnych

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \qquad dla \qquad x_0 \neq x_1$$

piszemy jako następującą zależność współrzędnej $y$ od współrzędnej $x$:

$$y = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{1.9}$$

Istotnie, gdy $x = x_0$ to $y = y_0$ lub gdy $x = x_1$ to $y = y_1$.
To znaczy, że punkty $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ leżą na prostej.

### 1.5.1 Przykłady

**Przykład 1.9** *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

*Sprawdź, który z punktów* $(1, 1)$, $(1, 2)$ *leży na prostej.*

**Rozwiązanie:**
Piszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$(x_0, y_0) = (-1, 0) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1)$$

podstwiając do wzoru (1.9) ich współrzędne znajdujemy równanie prostej

$$\begin{aligned} y &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\ &= \frac{x - 0}{-1 - 0} * 0 + \frac{x + 1}{0 + 1} * 1 \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1, 0)$ i $(0, 1)$

$$y = x + 1$$

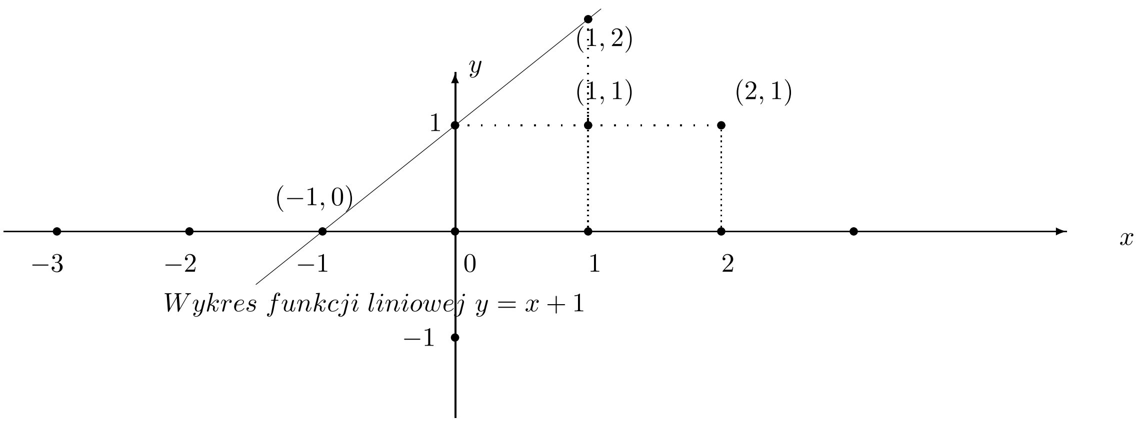
[2] Tutaj używamy uproszczonych oznaczeń $y = y(x),\ y_0 = y(x_0),\ y_1 = y(x_1)$

Punkt $(1,1)$ nie leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne nie spełniają równania tej prostej bo

$$1 \neq 1+1$$

Natomiast punkt $(1,2)$ leży na prostej $y = x+1$ ponieważ jego współrzędne spełniają równanie tej prostej bo

$$2 = 1+1$$



*Wykres funkcji liniowej* $y = x+1$

Zauważmy, że równania prostej określonej przez funkcje liniową

$$y(x) = ax + b$$

lub prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty nie obojmują położenia prostych prostopadłych do osi $x$. Natomiast równanie ogólne prostej, które obejmuje wszystkie możliwe położenia prostej na płaszczyźnie rozpatrujemy w następnej sekcji.

### 1.5.2 Zadania

**Zadanie 1.3** *podaj równanie prostej przechodzącej przez punkty*

$$P = (1,0) \quad i \quad Q = (0,1)$$

**Zadanie 1.4** *podaj równanie prostej przechodzącej przez punkty*

$$P = (1,1) \quad i \quad Q = (-1,-1)$$

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.6 Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie

Ogólne równanie prostej na płaszczyźnie

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0, \tag{1.10}$$

gdzie współczynniki $a, b$ nie znikają jednocześnie dla $a^2 + b^2 > 0$.

### 1.6.1 Przykłady

**Przykład 1.10** *współczynniki równania*

$$x + y - 1 = 0$$

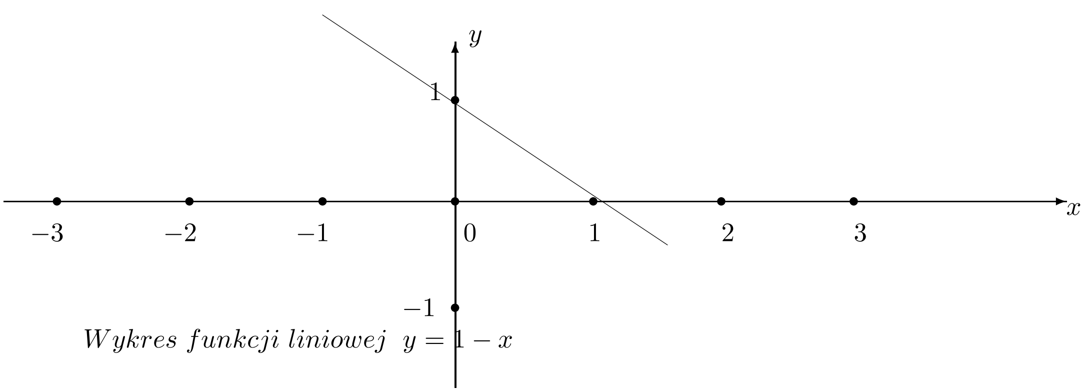
$a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ *nie znikają jednocześnie*

$$a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2 > 0.$$

*Równanie tej prostej możemy napisać w postaci funkcji liniowej*

$$y = 1 - x$$

*której wykres podajemy niżej*




*Wykres funkcji liniowej* $y = 1 - x$

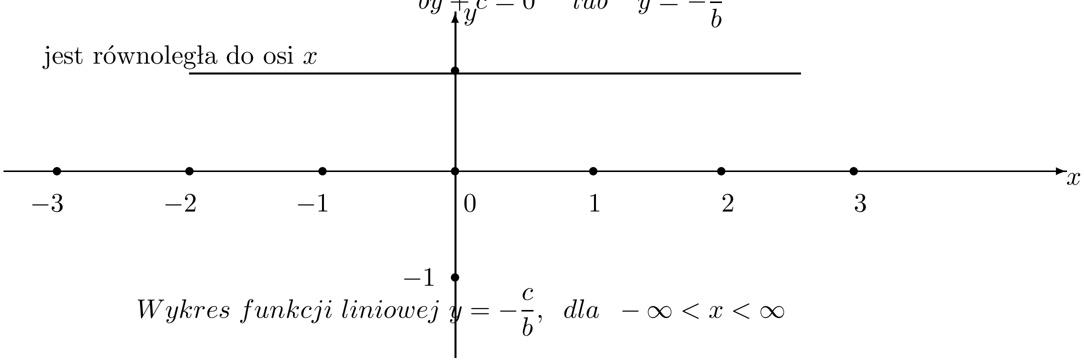
Rozpatrzmy trzy pozycje położenia prostej $L$ o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad a^2 + b^2 > 0$$

1. Prosta $L$ jest równoległa do osi $x$, jeżeli współczynnik $a = 0$, natomiast współczynnik $b \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$by + c = 0 \quad lub \quad y = -\frac{c}{b}$$

jest równoległa do osi $x$

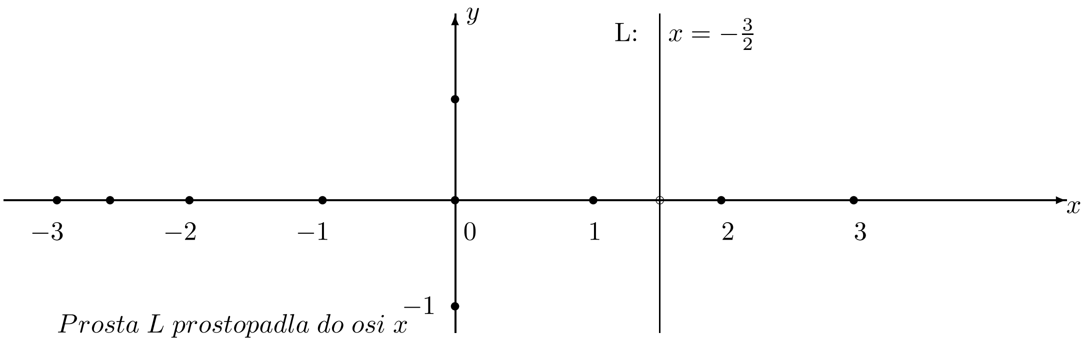



*Wykres funkcji liniowej* $y = -\frac{c}{b}$, *dla* $-\infty < x < \infty$

2. Prosta $L$ jest prostopadła do osi $x$, jeżeli współczynnik $b = 0$, natomiast współczynnik $a \neq 0$.
Wtedy prosta o równaniu

$$ax + c = 0 \quad lub \quad x = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad -\infty < y < \infty$$

jest prostopadła do osi $x$.
Wykres prostej $L$ o równaniu $2x + 3 = 0$ lub $x = -\frac{3}{2}$, *dla* $-\infty < y < \infty$ podajemy niżej




*Prosta L prostopadla do osi x*

3. Prosta $L$ o równaniu

$$ax + by + c = 0, \qquad gdy \quad a \neq 0, \; i \; b \neq 0$$

przecina oś $x$ w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$ oraz oś $y$ w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$

**Przykład 1.11** *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$x + y - 1 = 0$$

*z osią x i z osią y*

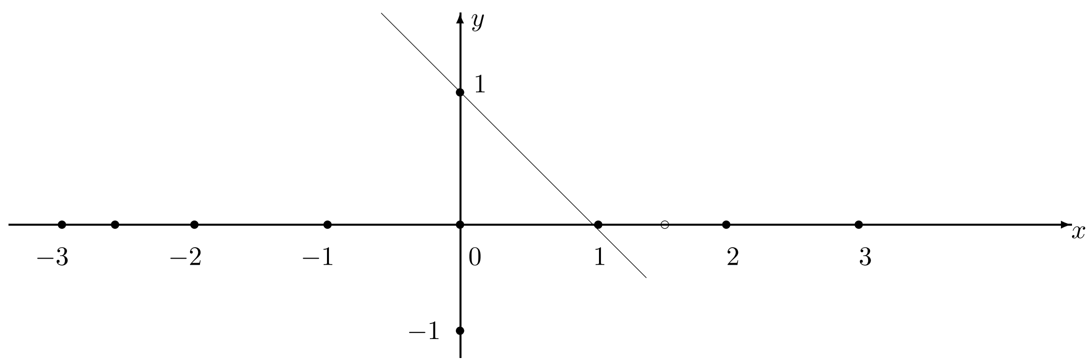
**Rozwiązanie.**
Dla prostej $L$ o współczynnikach $a = 1,\ b = 1,\ c = -1$ obliczamy współrzędną x punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią x, gdy $y = 0$

$$x = -\frac{c}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

współrzędną punktu przecięcia prostej $x + y - 1 = 0$ z osią y, gdy $x = 0$

$$y = -\frac{c}{b} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

Wykres prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$.




### 1.6.2 Zadania

**Przykład 1.12** *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$2x - 3y - 1 = 0$$

*z osią x i z osią y*

**Przykład 1.13** *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$x + y + 1 = 0$$

*z osią x i z osią y*

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.6: Proste równoległe. Równanie ogólne

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.7 Proste równoległe. Równanie ogólne.

Rozpatrzmy dwie proste $L_1$ i $L_2$ o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : \quad & a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Proste $L_1$ i $L_2$ o równananiach (1.11) są równoległe, jeżeli współczynniki $a_1, b_1$ są proporcjonalne do współczynników i $b_1, b_2$, to znaczy

$$a_1 = k * a_2, \quad b_1 = k * b_2 \tag{1.12}$$

dla pewnej liczby $k \neq 0$, którą nazywamy współczynnikiem proporcji.

### 1.7.1 Przykłady

**Przykład 1.14** *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 : \quad & x - y + 1 = 0 \\ L_2 : \quad & x - y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej $L_1$ i $L_2$.*

**Rozwiązanie.**
Proste $L_1$ i $L_2$ są równoległe ponieważ ich współczynniki

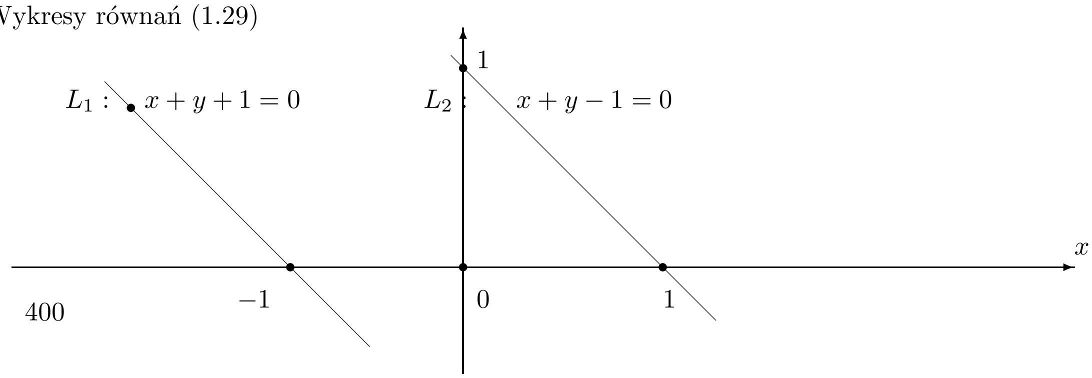
$$a_1 = 1, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1,$$

spełniają warunek proporcji (1.12)

$$1 = 1 * 1, \quad -1 = -1 * 1$$

dla współczynnika proporcji $k = 1$
Wykresy równań (1.29)




Zauważmy, że prosta o równaniu

$$ax + by + c = 0$$

- przecina oś $y$, w punkcie $(0, -\frac{c}{b})$, gdy $x = 0$, wtedy prosta jest równoległa do oisi $x$

$$by + c = 0, \quad i \quad y = -\frac{c}{b}, \quad dla \quad b \neq 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

- przecina oś $x$, w punkcie $(-\frac{c}{a}, 0)$, gdy $y = 0$, wtedy prosta jest równoległa do osi $y$

$$ax + c = 0, \quad i \quad x = -\frac{c}{a} \quad dla \quad a \neq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- dwie proste o równaniach

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

przecinają się w punkcie $(x_0, y_0)$, jeżeli ten punkt spełnia równania tych prostych

$$\begin{aligned} L_1: &\quad a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ L_2: &\quad a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

**Przykład 1.15** *Podaj położenie na płaszczyźnie $(x, y)$ dwóch prostych o rónaniach*

$$x - y = 0,$$

$$x + y - 1 = 0$$

*Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy $x$ i $y$ oraz punkt przecięcia tych prostych.*

**Rozwiązanie.** Prosta o równaniu $x - y = 0$ przecina oś $x$ i oś $y$, gdy $y = 0$, lub $x = 0$, wtedy$x = y = 0$. Zatem ta prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, przez

punkt $(0,0)$.
Prosta o równaniu $x+y-1=0$ przecina oś $x$, gdy $y=0$. Wtedy mamy równanie

$$x-1=0, \quad i \;\; x=1.$$

Prosta o równaniu $x+y-1=0$ przecina oś $y$, gdy $x=0$. Wtedy mamy równanie

$$y-1=, \quad i \;\; y=1.$$

Zatem prosta ta przecina oś $x$ w punkcie $(1,0)$ i przecina oś $y$ w punkcie $(0,1)$.
Dwie proste przecinają się w punkcie $(x_0,y_0)$, gdy współrzędne tego punktu spełniają oba równania, to znaczy

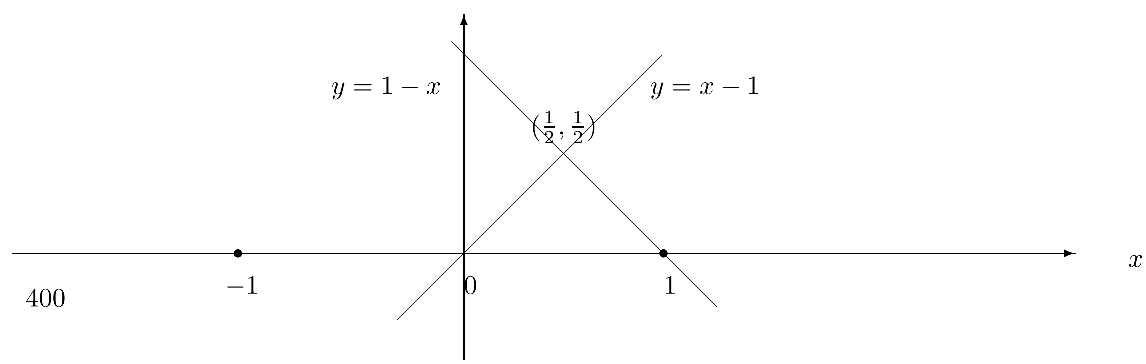
$$x_0-y_0=0, \quad y_0=x_0$$

$$x_0+y_0-1=0$$

Podstawiając $y_0=x_0$ do drugiego równania znajdujemy

$$x_0+y_0-1=0, \qquad 2x=1, \quad x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{2}.$$

Zatem proste przecinają się w punkcie $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$




Proste: $y=x, \quad y=1-x$

### 1.7.2 Zadania

**Zadanie 1.5** *Sprawlź czy proste*

$$L_1: \quad x-2y+1=0$$
$$L_2: \quad x-2y-1=0 \tag{1.16}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej $L_1$ i $L_2$.*

SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.7: Proste prostopadłe. Równanie ogólne

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

## 1.8 Proste prostopadłe. Równanie ogólne

Rozpatrzmy dwie proste $L_1$ i $L_2$ o równaniach w formie ogólnej

$$\begin{aligned} L_1: \quad & a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: \quad & a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Proste $L_1$ i $L_2$ o równananiach (1.17) są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy, jeżeli współczynniki $a, b_1$ i $a_2, b_2$ spełniają równanie

$$a_1 * b_1 + a_2 * b_2 = 0 \tag{1.18}$$

### 1.8.1 Przkłady

**Przykład 1.16** *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: \quad & 2x - y - 2 = 0 \\ L_2: \quad & x + 2y + 2 = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

*są prostopadłe.*
*Podaj wykresy prostych $L_1$ i $L_2$.*

**Rozwiązanie.**
Proste $L_1$ i $L_2$ są prostopadłe ponieważ ich współczynniki

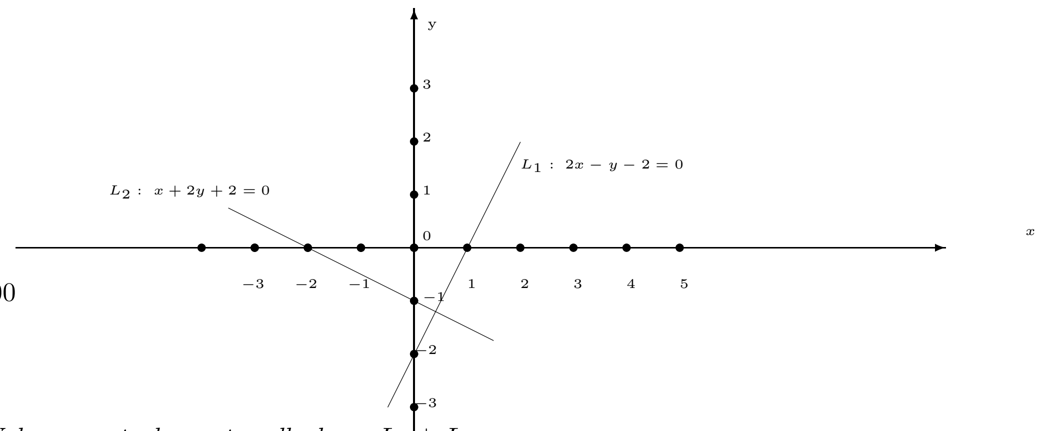
$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2,$$

spełniają warunek proporcji (1.18)

$$2 * 1 + (-1) * 2 = 0$$

Wykresy prostych $L_1$ i $L_2$ określonych przez równania (1.30)




400

*Wykres prostych prostopsdłych:* $L_1 \perp L_2$
SZKOŁA PODSTAWOWA HELIANTUS
02-892 WARSZAWA
ul. BAŻANCIA 16

TEMAT 10.8: Równanie ogólne parametryczne prostej

10 godzin lekcyjnych po 45 minut

Tadeusz STYŠ

.

# Contents

### 1.8.2 Zadania

**Zadanie 1.6** *Sprawlź czy proste*

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad x - y - 1 = 0 \\
L_2: &\quad x + y + 2 = 0
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

*są prostopadłe.*
*Podaj wykresy prostych $L_1$ i $L_2$.*

## 1.9 Równanie parametryczne prostej

Równanie parametryczne prostej $L$ przechodzącej przez dwa punkty

$$P = (x_1, y_1) \quad i \quad Q = (x_2, y_2)$$

piszemy w postaci

$$L(t) \quad = \quad P + (Q - P)t, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.21}$$

lub w postaci

$$L(t) \quad = \quad Q * t + (1 - t)P, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.22}$$

Zauważmy, że punkty $P$ i $Q$ leżą na prostej $L(t)$, ponieważ dla parametru $t = 0$ mamy punkt

$$L(0) = P$$

i dla parametru $t = 1$ mamy punkt

$$L(1) = Q.$$

Jeżeli parametr $t$ zmienia się od 0 do 1 to punkt $L(t)$ zmienia się wzdłuż odcinka o początku w punkcie $P$ i końcu w punkcie $Q$. Natomiast, jeżeli parametr $t$ zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt $L(t)$ przebiega całą prostą $L$.
Wtedy prosta $L$ jest równoległa do wektora

$$\vec{v} = Q - P$$

o współrzędnych

$$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

### 1.9.1 Przykłady

Parametryczne równanie prostej $L(t)$ piszemy również we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + t * x_2 \\ y(t) &= y_1 + t * y_2, \end{aligned} \tag{1.23}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.

**Przykład 1.17** .
(*i*) *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (0, -1)$ *i* $Q = (2, 1)$
(*ii*) *Podaj wykres prostej* $L(t)$.

**Rozwiązanie** (*i*)
Podstawiając do parametrycznego równania prostej (1.22) dane punkty

$$P = (0, -1) \;\; i \;\; Q = (2, 1)$$

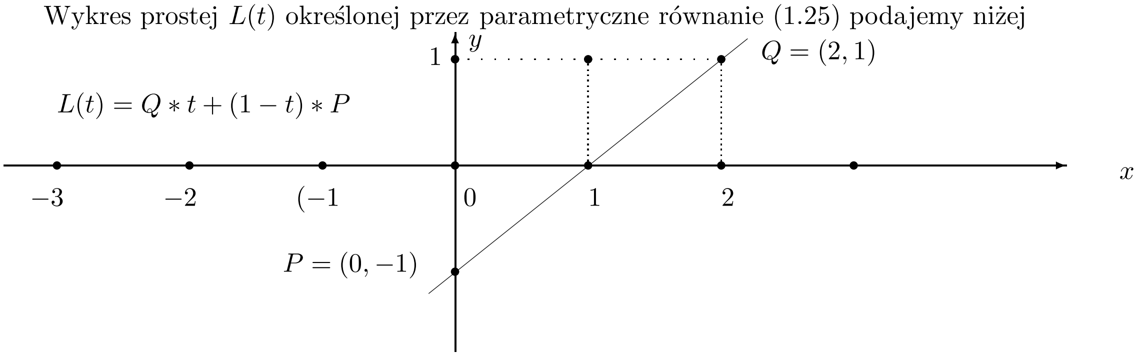
otrzymamy równanie

$$L(t) \;\;=\;\; L(t) = (2, 1)t + (1 - t)(0, -1) \tag{1.24}$$

Równanie (1.23) piszemy we współrzędnych

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 2t - 1, \end{aligned} \tag{1.25}$$

dla parametru $t \in (-\infty, +\infty)$.
**Rozwiązanie** (*ii*).
Wykres prostej $L(t)$ określonej przez parametryczne równanie (1.25) podajemy niżej




*Wykres prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez punkty* $P$ *i* $Q$

### 1.9.2 Zadania

**Zadanie 1.7** .
(*i*) *Narysuj linię prostą na płaszczyźnie, w układzie współrzędnych* $x, y$, *przechodzą przez dwa punkty* $(-1, -2)$ *i* $(2, 1)$
(*ii*) *Oblicz współczynniki funkcji liniowej*

$$y(x) = ax + b,$$

*przechodzącej przez punkty* $(-1, -2)$ *i* $(2, 1)$

**Zadanie 1.8** *Podaj położenie na płaszczyźnie* $(x, y)$ *dwóch prostych* $L_1$ *i* $L_2$ *o rónaniach*

$$L_1 : \quad y = 2x - 1, \qquad\qquad L_2 : \quad y = 1 - 2x$$

*Znajdź punkt przecięcia prostych* $L_1$ *i* $L_2$.

**Zadanie 1.9** *Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty* $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ *i* $(x_1, y_1) = (1, 1)$. *Sprawdź który z punktów* $(0, 1)$, $(2, 2)$ *leży na prostej.*

**Zadanie 1.10** .
$(i)$ *Sprawdź, które z punktów*

$$P_1 = (0, 0), \qquad P_2 = (1, 1),$$

$$P_3 = (0, 2), \qquad P_4 = (2, 0)$$

*leżą na prostych* $L_1$ *lub* $L_2$ *o równaniach*

$$L_1 : \quad y_1(x) = 2x, \qquad L_2 : \quad y_2(x) = 2 - x \tag{1.26}$$

$(ii)$ *Znajdź punkt przecięcia prostych* $L_1$, $L_2$. *Podaj wykres tych prostych.*

**Zadanie 1.11** *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 : &\quad y = 3x + 1, \quad L_3 : \quad 2x + 3 \\ L_2 : &\quad y = 3x - 1, \quad L_4 : \quad 3x - 3 \end{aligned} \tag{1.27}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej* $L_1$ *i* $L_2$.

**Zadanie 1.12** *Wyznacz równanie prostej* $L$ *równoległej do prostej*

$$L_0 : \quad y = 1 - x$$

*przechodzącej przez punkt*

$$P = (-1, 1),$$

*Podaj wykres prostej* $L_0$ *i prostej* $L$

**Zadanie 1.13** *Sprawdź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1 : &\quad y = 0.5x - 1 \\ L_2 : &\quad y = 1 - 2x \end{aligned} \tag{1.28}$$

*są prostopadłe.*
*Podaj wykresy prostej* $L_1$ *i* $L_2$.

**Zadanie 1.14** *Wyznacz równanie prostej* $L$ *prostopadłej do prostej*

$$L_0 : \quad y = 2 - x$$

*przechodzącej przez punkt*

$$P = (-1, -1),$$

*Podaj wykres prostej* $L_0$ *i prostej* $L$

**Zadanie 1.15** *Napisz równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty*

$$(x_0, y_0) = (-1, 2) \quad i \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

*Sprawdź, który z punktów* $(1, 0)$, $(2, -1)$ *leży na prostej.*

**Zadanie 1.16** *Znajdź współczynniki* $a, b, c$ *równania prostej* $L$ *w forme ogólnej*

$$L: \quad ax + by + c = 0$$

*przechodzącej przez punkty*

$$P = (-2, 2), \qquad Q = (1, 0)$$

**Zadanie 1.17** *Podaj wykres i znajdź punkty przecięcia prostej*

$$2x + y - 4 = 0$$

*z osią* $x$ *i z osią* $y$

**Zadanie 1.18** *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 2x - y + 1 = 0 \\ L_2: &\quad 4x - 2y - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

*są równoległe.*
*Podaj wykresy prostej* $L_1$ *i* $L_2$.

**Zadanie 1.19** *Podaj położenie na płaszczyźnie* $(x, y)$ *dwóch prostych o rónaniach*

$$2x - y = 0,$$

$$x + 2y - 1 = 0$$

*Znajdź ich punkty przecięcia z osiamy* $x$ *i* $y$ *oraz punkt przecięcia tych prostych.*

**Zadanie 1.20** *Sprawlź czy proste*

$$\begin{aligned} L_1: &\quad 3x - y - 1 = 0 \\ L_2: &\quad x + 3y + 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.30}$$

*są prostopadłe.*
*Podaj wykresy prostych* $L_1$ *i* $L_2$.

**Zadanie 1.21** .
$(i)$ *Znajdź równanie parametryczne prostej* $L(t)$ *przechodzącej przez dwa punkty* $P = (1, -1)$ *i* $Q = (2, -1)$
$(ii)$ *Podaj wykres prostej* $L(t)$.

**Zadanie 1.22** *Znajdź równanie parametryczne prostej o równaniu*

$$y = x$$

*danym w układzie współrzędnych* $x, y$.

**Zadanie 1.23** *Znajdź punkt przecięcia prostych o równaniach parametrycznych*

$$L_1(t): \; x(t) = t, \quad y(t) = t, \qquad -\infty < t < \infty.$$

$$L_2(t): \; x(t) = t, \quad y(t) = -t, \quad -\infty < t < \infty.$$

*na płaszczyźnie we współrzędnych* $x, y$.